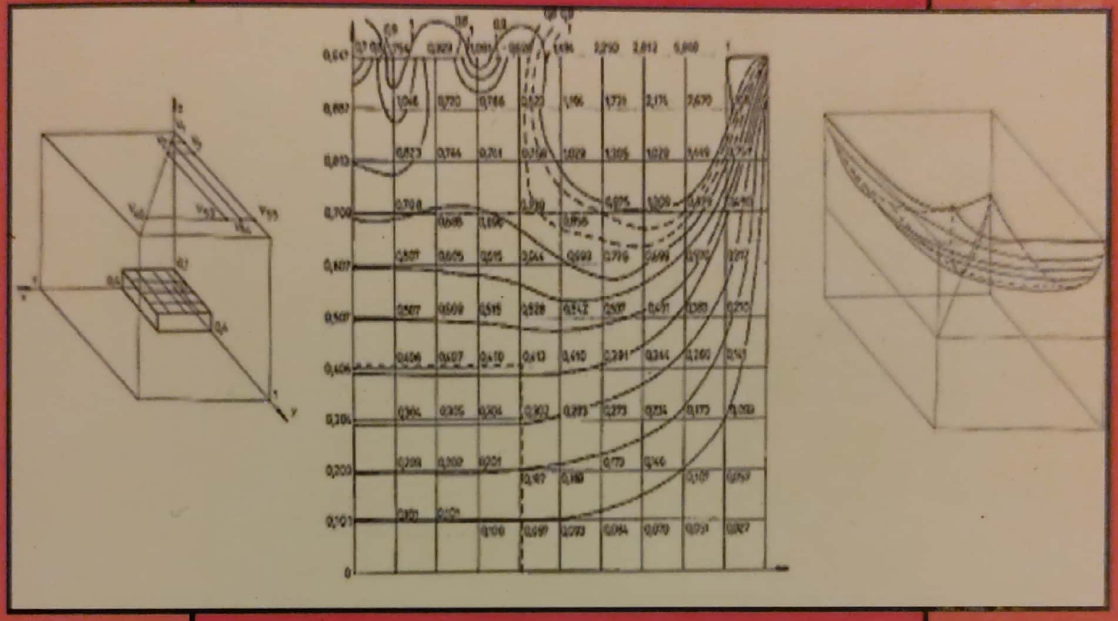
UNIVERSITARIA
SERIA TEHNICA

DAN MICU
ADRIANA MICU



ELEMENTE DE SINTEZA CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC

DACIA

Scanned with OKEN Scanner

Dan Micu Adriana Micu

ELEMENTE DE SINTEZA CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC

Scanned with OKEN Scanner

Colecţia **UNIVERSITARIA**
Seria *TEHNICA*

Coperta: **Andrei Cete**

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
MICU, DAN
Elemente de sinteza câmpului electromagnetic / Dan Micu, Adriana Micu.
- Ed. a 2-a, rev. - Cluj-Napoca: Dacia, 2005
Bibliogr.
ISBN 973-35-1982-0

I. Micu, Adriana Maria

537.8

© **Editura Dacia**
Cluj-Napoca: 400620, str. Fabricii nr. 7 et. I ap. 65, 68
tel. 0264/45 21 78, O.P. 1, C.P. 160
e-mail: office@edituradacia.ro, www.edituradacia.ro
Bucureşti: str. Iacob Negruzzi, nr. 46, sector 1, O. P. 12
tel./fax 021/222 24 82
Satu Mare: 440167, B-dul Lalelei R13 et. VI ap. 18
tel. 0261/76 91 11; fax: 0261/76 91 12
Căsuţa poştală 509; Piaţa 25 octombrie nr. 12
www.multiarea.ro
Baia Mare: 430061, str. Victoriei nr. 146
tel./fax: 0262/21 89 23
Târgu Mureş: 540362, str. Măgurei nr. 34
tel./fax: 0265/13 22 87

Comanda nr. 4832

Scanned with OKEN Scanner

Dan Micu Adriana Micu

ELEMENTE DE SINTEZA CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC

EDIȚIA A II-A

EDITURA DACIA
Cluj-Napoca, 2005

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ LA PRIMA EDIȚIE

În urmă cu câțiva ani, citind o carte apărută în străinătate într-o editură științifică de prestigiu, am descoperit o greșeală care își avea originea în interpretarea eronată a unui element de natură matematică al teoriei sintezei numerice. Ne-am gândit atunci că dacă la nivelul specialiștilor se pot face asemenea confuzii, o carte care ar trata sinteza de câmp începând de la elementele fundamentale ar fi foarte utilă. Am fost încurajați în acest proiect și de interesul cu care au fost primite cele cinci articole publicate pe această temă în revista de profil electric a Academiei Române.

Sinteza câmpului electromagnetic este o teorie nouă ale cărei baze teoretice au fost puse în ultimul sfert de secol. Dezvoltarea acestei teorii a fost posibilă datorită unor lucrări apărute în matematică în deceniile 6 și 7. Sinteza este problema inversă a analizei câmpului electromagnetic.

În cazul în care sunt bine determinate niște condiții, numite de unicitate, teoria analizei pune la dispoziția cercetătorului metode prin care se află câmpul unic care satisface aceste condiții. În cazul sintezei se impune câmpul într-o anumită parte a spațiului și se cer condițiile în care acest câmp poate fi creat. Este posibil să nu existe nici o soluție exactă a unei probleme de acest fel și atunci se pune întrebarea cum se află soluțiile aproximative cele mai convenabile (pseudosoluțiile sau soluțiile regularizate). Este posibil să existe mai multe soluții de eroare minimă sau nulă și atunci se pune problema alegerii soluției optime (pseudosoluția normală).

Din punct de vedere matematic problemele de sinteză duc în majoritatea cazurilor la așa numitele probleme "incorect puse", caracterizate prin faptul că o variație mică a condițiilor impuse poate duce la variații mari ale soluției sau mai plastic prin "o bătaie de aripi a unui fluture la New-York poate produce un taifun la Tokyo". Până de curând matematicienii au considerat că aceste probleme nu merită nici o atenție dar odată abordate, rezultatele au fost surprinzătoare. Instabilitatea problemelor de sinteză este gradată, "taifunul" poate fi mai blând sau dezastruos, iar instrumentul de măsură din punct de vedere matematic este numărul de condiționare, prezentat pe larg în paginile cărții.

Este cunoscut faptul că dacă se aruncă la întâmplare o monedă de 1000 de ori "pajura" va apare aproximativ de 500 de ori. Această observație se află la baza unei metode de analiză a câmpului numită metoda Monte-Carlo, care are avantajul că permite aflarea câmpului într-o zonă restrânsă fără a fi necesară cunoașterea câmpului în tot domeniul, ca și la celelalte metode numerice. Sinteza pe baza metodei statistice Monte-Carlo, în mediu omogen și neomogen, constituie o realizare importantă a autorilor și este pentru prima dată când toate rezultatele publicate în lucrări apar reunite într-un volum.

Scanned with OKEN Scanner

Există un capitol al sintezei, sinteza analitică, ale cărei baze au fost puse de către un cercetător român, prof. dr. ing. Andrei Ţugulea, în anul în care se puneau bazele matematice ale sintezei numerice.

Sinteza câmpului electromagnetic este parte integrantă a teoriei câmpului electromagnetic, alături de analiză, având trăsături specifice care o individualizează, astfel încât se poate afirma că sinteza este un capitol distinct al teoriei câmpului şi nu o anexă a teoriei analizei. De altfel, primul autor al cărţii conduce două doctorate pe această temă şi predă de mai mulţi ani elemente de sinteza câmpului electromagnetic în cadrul cursului de "Metode numerice" la Facultatea de Electrotehnică din Cluj-Napoca. Avem convingerea că datorită aplicaţiilor importante pe care le are în proiectare, teoria sintezei câmpului electromagnetic se va preda în viitor ca un curs distinct la universităţile tehnice.

În prezenta lucrare aplicaţiile se referă în principal la chestiuni de proiectare a unor elemente utile traductoarelor precum şi la realizarea unor câmpuri electrice şi magnetice constante, fiind exemplificate toate chestiunile teoretice prezentate.

Rod al cercetărilor din ultimii zece ani când autorii au avut acces la mai multe biblioteci ale unor universităţi din vestul Europei, cartea poate fi utilă studenţilor de la facultăţile de profil electric, matematicienilor, doctoranzilor, inginerilor şi proiectanţilor precum şi unui public mai larg interesat de cercetări moderne în domeniul câmpului electromagnetic.

Cluj-Napoca, 2003

Prof.dr.ing. Dan Micu
Dr.ing. Adriana Micu

PREFAŢĂ LA EDIŢIA A DOUA

Prima ediţie a acestei cărţi a apărut în librării la începutul anului 2003 şi a fost foarte bine primită de publicul cititor, tirajul epuizându-se repede.

În anul 2004 lucrarea a fost distinsă de cel mai înalt for ştiinţific al ţării cu Premiul Academiei Române pentru Ştiinţe Tehnice "Constantin Budeanu", acesta fiind un alt argument pentru reeditarea ei.

Avem convingerea că în noul context european al învăţământului şi ştiinţei româneşti lucrări de acest fel, care îmbină cercetarea fundamentală cu cea aplicativă, îşi vor dovedi tot mai mult utilitatea.

Cluj-Napoca, 2005

Prof.dr.ing. Dan Micu
Dr.ing. Adriana Micu

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

BAZELE TEORETICE ALE SINTEZEI DE CÂMP ELECTROMAGNETIC..... 13

1.INTRODUCERE ÎN TEORIA SINTEZEI DE CÂMP ELECTROMAGNETIC.....13
1.1.Definirea sintezei de câmp 13
1.2.Formularea problemei sintezei 14
1.3.Etape specifice unei probleme de sinteză 15
1.4.Noțiunea de problemă incorect pusă 17
Bibliografie la capitolul 1 20

2.SINTEZA DE CÂMP BAZATĂ PE METODA REGULARIZĂRII TIHONOV 22
2.1.Baza matematică a metodei regularizării 22
2.1.1.Formularea problemei 22
2.1.2.Noțiunea de operator de regularizare 23
2.1.3.Funcționala stabilizatoare.....25
2.1.4.Funcționala de legătură 27
2.1.5.Alegerea funcționalei stabilizatoare 28
2.1.6.Determinarea parametrului de regularizare 30
2.2.Metoda regularizării în rezolvarea ecuației integrale Fredholm de ordinul întâi31
2.2.1.Formularea problemei 31
2.2.2.Condiția de extrem a unei funcționale.....32
2.2.3.Condiția de minimizare a funcționalei de legătură.....35
2.2.4.Forma numerică a ecuației integrale Fredholm de ordinul întâi.....37
2.3.Metoda regularizării aplicată sistemelor de ecuații liniare degenerate.....39
2.3.1.Formularea problemei 39
2.3.2.Regularizarea sistemelor degenerate 42
Bibliografie la capitolul 2.....43

3.PSEUDOSOLUȚII ALE SISTEMELOR DE ECUAȚII ALGEBRICE LINIARE DEGENERATE SAU RĂU CONDIȚIONATE.....45
3.1.Definirea pseudosoluțiilor 45
3.2.Determinarea pseudosoluțiilor cu metoda determinanților Gramm 46
3.2.1.Exemple simple de aflare a pseudosoluțiilor.....46
3.3.Determinarea pseudosoluțiilor cu metoda minimizării normei erorilor 52
Bibliografie la capitolul 3.....54

Scanned with OKEN Scanner

4.PSEUDOSOLUȚII NORMALE ALE SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE DEGENERATE SAU RĂU CONDIȚIONATE 55
4.1.Definirea pseudosoluțiilor normale 55
4.2.Determinarea pseudosoluțiilor normale cu metoda determinanților Gramm 56
4.2.1.Pseudosoluția normală pentru un sistem cu m=1, n=2 56
4.2.2.Pseudosoluția normală pentru un sistem cu m=1, n=3 59
4.2.3.Pseudosoluția normală pentru un sistem cu m=3, n=3 63
4.2.4.Algoritmul de determinare a pseudosoluției normale cu metoda determinanților Gramm 67
4.3.Metoda coeficienților binomiali pentru determinarea pseudosoluțiilor normale 69
4.3.1.Legătura dintre pseudosoluția normală și soluția regularizată 69
4.3.2.Baza matematică a metodei coeficienților binomiali 72
4.3.3.Formula de calcul a pseudosoluției normale 74
4.3.4.Evaluarea erorii absolute și relative 78
4.3.5.Aplicarea metodei coeficienților binomiali la evaluarea parametrului de regularizare 80
4.3.6.Determinarea pseudosoluției normale a unui sistem degenerat cu m=3, n=3 cu metoda coeficienților binomiali 82
Bibliografie la capitolul 4 85

5.CONDIȚIONAREA SISTEMELOR DE ECUAȚII ALGEBRICE LINIARE 86
5.1.Dublul rol al condiționării sistemelor, în aprecierea degenerării și în analiza compatibilității electromagnetice 86
5.2.Bazele matematice ale numărului de condiționare 88
5.2.1.Norma unui vector 88
5.2.2.Norma unei matrice 89
5.2.3.Norma matricială subordonată normei vectoriale 90
5.2.4.Proprietăți ale normei spectrale 93
5.3.Numărul de condiționare 95
5.3.1.Proprietăți ale numărului de condiționare 96
5.3.2.O formulă aproximativă 97
5.4.Studiul compatibilității electromagnetice cu ajutorul numărului de condiționare 99
5.4.1.Imunitatea sistemului în cazul perturbațiilor care afectează sursele 100
5.4.2.Imunitatea în cazul perturbațiilor care afectează structura dispozitivului 102
5.5.Interpretarea geometrică a condiționării sistemelor de ecuații algebrice liniare și a compatibilității electromagnetice 107
5.5.1.Inegalitatea lui Wielandt și Kantorovitch 107
5.5.2.Compararea a două dispozitive supuse aceleeași perturbații 116
5.5.3.Proprietatea de saturație a perturbației 120
5.5.4.Efectul distructiv maxim al unei perturbații date 120
Bibliografie la capitolul 5 122

Scanned with OKEN Scanner

6.ANALIZA ŞI SINTEZA NUMERICĂ ÎN MEDII OMOGENE ŞI NEOMOGENE CU METODA MONTE CARLO 123
6.1.Introducere 123
6.2.Bazele teoretice ale metodei Monte Carlo de analiză şi sinteză numerică pentru medii neomogene 123
6.2.1.Forma numerică a ecuaţiei lui Poisson pentru reţea de discretizare dreptunghiulară şi mediu neomogen (câmp electric staţionar)..... 124
6.2.1.1.Metoda seriei Taylor 125
6.2.1.2.Metoda fluxului electric 130
6.2.2.Forma numerică a ecuaţiei lui Poisson pentru reţea de discretizare dreptunghiulară şi mediu neomogen (câmp magnetic staţionar)... 133
6.2.2.1.Metoda seriei Taylor 133
6.2.2.2.Metoda integralei de contur..... 137
6.3.Metoda Monte Carlo pentru mediu neomogen..... 139
6.3.1.Estimatorul statistic primar 139
6.3.2.Estimatorul statistic secundar ameliorat..... 144
6.3.3.Metoda Monte Carlo de analiză pentru mediu neomogen şi reţea de discretizare dreptunghiulară..... 145
6.3.4 Metoda Monte Carlo de sinteză pentru mediu neomogen şi reţea de discretizare dreptunghiulară..... 146
Bibliografie la capitolul 6..... 147

7.SINTEZA ANALITICĂ DE CÂMP ELECTROMAGNETIC..... 149
7.1.Introducere 149
7.2.Forma diferenţială a ecuaţiilor câmpului electromagnetic 149
7.3.Modelul matematic diferenţial exprimat în funcţie de câmpul electric şi câmpul magnetic..... 151
7.4.Modelul matematic diferenţial exprimat în funcţie de potenţialul electric scalar şi potenţialul magnetic vector..... 152
7.4.1.Soluţia analitică a problemei inverse a potenţialului magnetic vector 153
7.4.2.Modelul matematic diferenţial în regim electric static..... 155
7.4.3.Modelul matematic diferenţial în regim magnetic static..... 157
7.4.4.Modelul matematic diferenţial în regim electric staţionar..... 158
7.4.5. Modelul matematic diferenţial în regim magnetic staţionar..... 160
Bibliografie la capitolul 7..... 161

Scanned with OKEN Scanner

APLICAȚII ALE SINTEZEI DE CÂMP ELECTROMAGNETIC. SINTEZA DE PROIECTARE 162

8.EXEMPLIFICAREA SINTEZEI DE PROIECTARE PRIN REGULARIZAREA ECUAȚIEI INTEGRALE FREDHOLM DE ORDINUL ÎNTÂI. PROIECTAREA UNUI TRADUCTOR DE POZIȚIE INDUCTIV DE CARACTERISTICĂ IMPUSĂ 162
8.1.Proiectarea bobinei traductor cu secțiune dreptunghiulară variabilă pe etaje .163
8.1.1.Stabilirea ecuației integrale Fredholm 164
8.1.2.Forma discretizată a ecuației integrale Fredholm 166
8.2.Proiectarea bobinei traductor cu secțiune pătrată dată cu un număr de spire variabil pe etaje 169
Bibliografie la capitolul 8 171

9.EXEMPLIFICAREA SINTEZEI DE PROIECTARE PRIN METODA REGULARIZĂRII SISTEMELOR DEGENERATE, CALCULUL PSEUDOSOLUȚIILOR, CALCULUL PSEUDOSOLUȚIILOR NORMALE.NUMĂRUL DE CONDIȚIONARE ÎN PROIECTARE 172
9.1.Etapele proiectării unui traductor de poziție inductiv 172
9.1.1.Obținerea sistemului degenerat de ecuații liniare 172
9.1.2.Condiționarea sistemului de ecuații liniare corespunzător problemei de proiectare 175
9.1.3.Calculul pseudosoluției cu metoda minimizării normei erorii 178
9.1.4.Calculul pseudosoluției normale cu metoda coeficienților binomiali 180
9.1.5.Calculul soluției cu metoda regularizării sistemelor degenerate 182
9.1.6.Observații asupra stabilității la perturbații pe baza teoremei lui Wielandt și Kantorovitch 189
9.1.7.Curba L 189
9.2.Proiectarea unui traductor pentru viteze mici 192
9.2.1.Principiul de funcționare al traductorului proiectat 192
9.2.2.Stabilirea relațiilor de proiectare 193
9.2.3.Rezultatele proiectării traductorului pentru viteze mici 196
Bibliografie la capitolul 9 198

10.EXEMPLIFICAREA SINTEZEI DE PROIECTARE PRIN METODA MONTE CARLO 199
10.1.Realizarea unui câmp electrostatic constant într-un subdomeniu de interes în cazul unei probleme cu simetrie plan-paralelă 199
10.1.1.Model discretizat în varianta cu capăt liber 201
10.1.2.Model discretizat în varianta cu capăt forțat 203
10.2.Realizarea unui câmp electrostatic constant într-un subdomeniu de interes în spațiu 205

Scanned with OKEN Scanner

10.3.Realizarea unui câmp electric constant într-un subdomeniu
de interes aparţinând unui domeniu neomogen 209
10.4.Identificarea poziţiei unui obiect folosind metoda Monte Carlo
de analiză în mediu neomogen 219
Bibliografie la capitolul 10.....222

11.EXEMPLIFICAREA SINTEZEI DE PROIECTARE
PRIN METODA ANALITICĂ.....223
11.1.Proiectarea prin sinteză analitică a unui câmp magnetic constant pentru un
dispozitiv de realizare a imaginii prin rezonanţă magnetică 223
11.1.1.Metoda analitică Ţugulea 223
11.1.2.Problema rezonanţei magnetice.....223
11.1.3.Modelul matematic al problemei de sinteză.....224
11.1.4.Rezultate numerice şi grafice 239
11.2.Exemplificarea metodei directe de sinteză analitică prin rezolvarea
problemei inverse a potenţialului magnetic vector.....240
Bibliografie la capitolul 11 243

Scanned with OKEN Scanner

BAZELE TEORETICE ALE SINTEZEI DE CÂMP ELECTROMAGNETIC

1.INTRODUCERE ÎN TEORIA SINTEZEI DE CÂMP ELECTROMAGNETIC

1.1 DEFINIREA SINTEZEI DE CÂMP

Teoria sintezei câmpului electromagnetic este strâns legată de teoria analizei, pusă în tipare definitive de către Maxwell în anul 1873 prin lucrarea "Tratat despre electricitate şi magnetism".

Teoria sintezei câmpului electromagnetic este o teorie relativ nouă ale cărei baze matematice au fost puse în deceniul şapte al secolului trecut prin lucrările lui A.N.Tihonov [1.1], D.L.Phillips [1.2], şi S.Twomey [1.3].

În literatura de specialitate nu există până astăzi un punct de vedere unitar asupra formulării problemei sintezei. Chiar denumirea adoptată, denumirea de "sinteză", circulă în paralel cu cea de "problemă inversă" care este folosită în lucrările de matematică în mod justificat, având un sens mai general. Considerând însă că problema directă a câmpului electromagnetic este problema analizei, apare logic ca problema inversă a câmpului electromagnetic să fie numită problema sintezei.

Simplificând la maximum se poate spune că 2 * 3 = ? este o problemă de analiză în aritmetică, iar 2 * ? = 6 este o problemă de sinteză cu soluţie unică. Tot o problemă de sinteză este însă şi ? * ? = 6 care are evident mai multe soluţii în mulţimea numerelor întregi şi o infinitate de soluţii în mulţimea numerelor raţionale.

Unii autori [1.4],[1.5],[1.6] văd o clasificare a sintezei în patru secţiuni:

1) sinteza de proiectare, care apare atunci când în procesul de concepere al unui dispozitiv electromagnetic se pune problema de a realiza nişte caracteristici care pot fi formulate în legătură cu proprietăţile unui câmp electric sau/şi magnetic.

2) sinteza de identificare, care cuprinde teoria şi practica acelei părţi din sinteză care se foloseşte atunci când după o funcţionare îndelungată a unui dispozitiv electromagnetic sau după defecţiuni remediate se cere să se facă o verificare a proprietăţilor dispozitivului respectiv.

3) sinteza de optimizare, care apare atunci când se pune problema de a realiza un câmp în anumite condiţii de restricţii, câmp care trebuie să aibă nişte proprietăţi bine precizate [1.7],[1.8].

4) sinteza surselor secundare, apare în legătură cu asimilarea condiţiilor de frontieră cu surse secundare (într-un strat sau în dublu strat).

Scanned with OKEN Scanner

Această clasificare ni se pare artificială şi potenţial generatoare de confuzii. Punctul nostru de vedere asupra acestei chestiuni este următorul: considerăm că sub numele de sinteză de proiectare se pot grupa toate aplicaţiile practice ale teoriei sintezei de câmp electromagnetic. Sinteza de identificare presupune în fond tot o acţiune de proiectare sau care se poate asimila acesteia, sinteza de optimizare poate fi socotită parte integrantă a sintezei de proiectare fiind cel mai spectaculos capitol al acesteia, iar sinteza surselor secundare este o metodă de proiectare particulară.

În consecinţă, metodele de optimizare specifice problemelor inverse se vor socoti în această lucrare probleme ale sintezei de proiectare. Partea a doua a cărţii, începând cu capitolul 8, se ocupă cu aplicaţiile sintezei de câmp, adică cu sinteza de proiectare.

1.2 FORMULAREA PROBLEMEI SINTEZEI

Formularea problemei sintezei este indisolubil legată de formularea problemei de analiză a câmpului electromagnetic.

În problema analizei [1.9] se consideră date (cunoscute):

1) condiţiile de material (permitivitatea, permeabilitatea, conductivitatea);

2) condiţiile de viteză (în cazul mediilor mobile);

3) condiţiile iniţiale (în regim nestaţionar acestea presupun cunoaşterea valorii câmpului electric şi magnetic în fiecare punct al domeniului la momentul iniţial);

4) condiţiile la limită (adică valorile unor componente ale câmpului electric şi magnetic la frontiera domeniului, inclusiv la infinit dacă domeniul este infinit extins);

5) condiţiile de surse (adică cunoaşterea în fiecare punct al domeniului a densităţii de volum a sarcinii electrice, a densităţii volumice de curent, a polarizaţiei permanente, a inducţiei remanente, a câmpului electric imprimat; dacă există subdomenii neomogene, cunoaşterea densităţii superficiale de sarcină electrică, respectiv a densităţii pânzei de curent la interfaţa acestor subdomenii).

În ipoteza că toate aceste condiţii (numite condiţii de unicitate) sunt cunoscute şi că domeniul este precizat, problema analizei cere determinarea mărimilor de stare a câmpului electric(**E**,**D**) sau/şi a câmpului magnetic(**H**,**B**).

Problema analizei are în aceste condiţii soluţie unică.

În cazul câmpului electric şi magnetic staţionar condiţiile de unicitate se reduc la 1),4) şi 5).

Problema sintezei de câmp electromagnetic presupune că sunt cunoscute sau impuse următoarele condiţii:

1) câmpul electric şi/sau magnetic pe întreg domeniul sau pe un subdomeniu.

Scanned with OKEN Scanner

2) domeniul întreg sau o parte din domeniu (în sensul că se poate cere configurația frontierei pentru care anumite condiții impuse să fie satisfăcute).
3) condițiile de material pe întreg domeniul sau pe o parte a domeniului (condițiile necunoscute intrând în categoria mărimilor ce urmează a fi determinate).
4) condițiile la limită pe toate frontierele care mărginesc domeniul, sau numai pe o porțiune a lor, celelalte urmând a fi determinate.
5) condițiile de surse în totalitate, parțial sau deloc.
În ipoteza că cele de mai sus sunt date, prin sinteza de proiectare se pot cere :
1) configurația optimă a frontierei necunoscute (precizăm că pe această frontieră condițiile pot fi sau nu cunoscute apriori).
2) condițiile de material pe anumite subdomenii.
3) condițiile la limită pe unele frontiere.
4) condițiile de surse, în totalitate sau parțial.

Sinteza este numită simplă dacă se cere una din condițiile 1),2),3),4) și compusă dacă se cer două sau mai multe condiții simultan.

1.3 ETAPE SPECIFICE UNEI PROBLEME DE SINTEZĂ

Orice problemă de sinteză a câmpului electromagnetic presupune parcurgerea unor etape specifice în procesul de rezolvare. Ponderea fiecărei etape în acest proces, ca și gradul de dificultate pe care îl comportă diferă de la o problemă la alta. Aceste etape sunt prezentate pe scurt în cele ce urmează.

1) Stabilirea modelului fenomenologic (modelului fizic).

Această etapă presupune precizarea condițiilor de unicitate cunoscute precum și a câmpului cunoscut (impus), de unde să rezulte cu claritate mărimile necunoscute care se cer a fi determinate în procesul sintezei.

2) Stabilirea modelului matematic

Modelul matematic se poate alege după dorința celui care abordează problema de sinteză. Astfel dacă legile câmpului electromagnetic sunt folosite sub forma lor diferențială atunci se spune că modelul matematic este diferențial, dacă legilor li se asociază funcționale energetice echivalente modelul se numește variațional iar dacă legile sunt folosite sub forma lor integrală se spune că modelul matematic este integral. Unui model fenomenologic i se poate aplica orice model matematic, dar în general există criterii obiective (legate de tipul problemei) sau subiective (legate de afinitatea rezolvitorului față de un anumit model) care fac ca un model să fie preferat.

3)Stabilirea metodei de prelucrare a modelului matematic.

Metoda de prelucrare a modelului matematic poate fi analitică sau numerică.

Metoda analitică se aplică prin rezolvarea efectivă a ecuațiilor modelului matematic (în general diferențial), fiind posibil de abordat doar probleme cu o

Scanned with OKEN Scanner

anumită simetrie. Metoda de rezolvare cea mai adecvată este metoda separării variabilelor. Această metodă a fost folosită în premieră [1.10] şi dezvoltată [1.11], [1.12] de către cercetători români.

Metoda numerică de prelucrare este strâns legată de modelul matematic ales.

Modelul matematic diferenţial presupune aplicarea metodei diferenţelor finite sau metodei Monte Carlo. După informaţiile pe care le avem, aplicarea metodei Monte Carlo la sinteza câmpului electromagnetic în mediu omogen [1.13] şi în mediu neomogen [1.14], [1.15], sunt priorităţi mondiale româneşti. Metoda Monte Carlo de analiză în mediu neomogen poate fi aplicată în probleme de identificare a poziţiei unui obiect [1.16].

Modelul matematic variaţional impune folosirea ca metodă de prelucrare a metodei elementelor finite în acest sens existând o metodă de trecere de la modelul de analiză la modelul de sinteză [1.17].

Modelul matematic integral odată ales, metoda de prelucrare numerică va fi metoda elementelor de frontieră [1.18], [1.19].

Prin analogie cu terminologia de la teoria analizei [1.9] se poate afirma că modelul matematic împreună cu metoda de prelucrare numerică constituie modelul numeric de sinteză.

Prin aplicarea modelului numeric de sinteză (oricare ar fi acesta) se ajunge la un sistem de ecuaţii liniare care în marea majoritate a cazurilor este degenerat (degenerare izvorâtă din supracondiţionarea care este tipică problemelor inverse) sau rău condiţionat [1.20], [1.21]. De aici începe sinteza propriu-zisă.

4)Stabilirea metodei de sinteză.

Metoda de sinteză se alege în funcţie de tipul sistemului rezultat după etapele anterioare.

Astfel prin aplicarea modelului numeric de sinteză care încorporează metoda Monte Carlo se ajunge la un sistem de m ecuaţii cu n necunoscute, $m \geq n$. Condiţionarea bună a sistemului realizată prin aplicarea metodei de tip statistic, aleator, duce la pseudosoluţii unice (rangul r satisface condiţia r=n) care sunt în general acceptabile.

Prin aplicarea celorlalte modele de sinteză se ajunge la sisteme de ecuaţii ale căror pseudosoluţii sunt unice dar inacceptabile în majoritatea cazurilor (nu se pot realiza fizic) sau la sisteme de ecuaţii cu o infinitate de pseudosoluţii având soluţia normală necorespunzătoare în cele mai multe situaţii. În aceste cazuri se recurge la regularizare. Metoda regularizării face un compromis între norma erorii sistemului (precizie) şi norma soluţiei (realizabilitate, stabilitate). Există două tipuri de metode de regularizare: metoda descompunerii după valorile singulare şi metoda de regularizare Tihonov cu două variante, metoda regularizării ecuaţiei integrale Fredholm de ordinul întâi [1.22] şi metoda regularizării sistemelor degenerate [1.23].

Scanned with OKEN Scanner

1.4 NOȚIUNEA DE PROBLEMĂ INCORECT PUSĂ

Problema sintezei de proiectare a câmpului electromagnetic duce din punct de vedere matematic la o problemă incorect pusă (mal posé, în limba franceză, ill posed, în engleză şi necorectnîh în rusă). Consecința practică este că la o astfel de problemă variații mici ale datelor inițiale pot să ducă la variații oricât de mari ale soluției . În problemele de sinteză datele inițiale sunt în general rezultatul unor măsurători astfel încât ele sunt cunoscute cu o anumită aproximație ceea ce face ca, în limitele unei precizii fixate a soluției, aceasta să nu poată fi considerată unică. Mai mult decât atât, aceste soluții pot să difere foarte mult între ele.

Un indicator important al măsurii în care o problemă este incorect pusă este condiționarea sistemelor. De aici rezultă importanța studiului referitor la numărul de condiționare [1.20] precum şi la interpretarea geometrică a condiționării [1.21].

Noțiunea de problemă incorect pusă a apărut în opoziție cu noțiunea de problemă corect pusă introdusă de Jacques Hadamard, [1.24], [1.25], cu scopul de a arăta care sunt cele mai naturale condiții la limită pentru diferite tipuri de ecuații diferențiale. Pentru a înțelege aceste noțiuni fundamentale pentru probema sintezei vom prezenta esența teoriei lui Hadamard.

Se notează cu **z** vectorul sursă, care cuprinde mărimile necunoscute ale sintezei (mărimi care se cer a fi determinate), cu **u** vectorul efect, care înglobează mărimile date (mărimi cunoscute sau impuse) şi cu **A** matricea operator, care reflectă legătura dintre sursă şi efect. În aceste condiții problema $\mathbf{A\,z = u}$ cu perechea **(z,u)** aparținând spațiilor metrice (F,U) este corect pusă dacă sunt îndeplinite condițiile:

1)pentru orice element $\mathbf{u}\in U$ există o soluție $\mathbf{z}\in F$.

2)soluția este unică.

3)problema este stabilă pe spațiile (F,U).

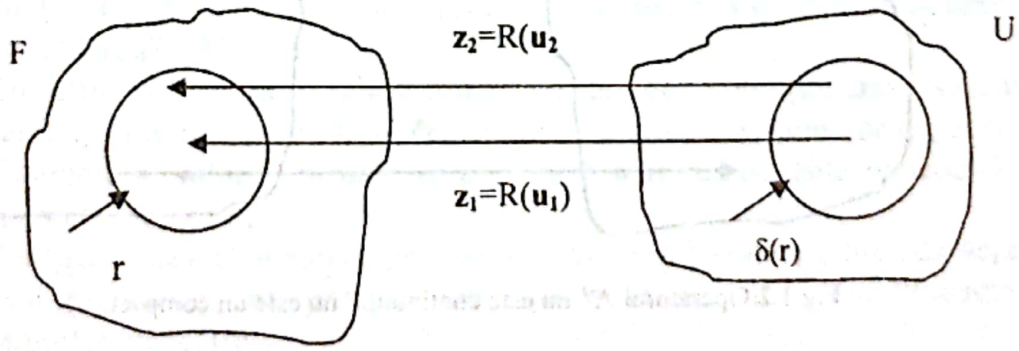


Fig.1.1 Condiția de stabilitate a problemei **Az=u**

Scanned with OKEN Scanner

Problema 3) a stabilității se pune în următoarea accepțiune. Se presupune că condițiile 1) și 2) sunt îndeplinite și se consideră că soluția $\mathbf{z}=R(\mathbf{u})$ este stabilă pe spațiile (F,U) dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există un $\delta(\varepsilon)>0$ astfel încât inegalitatea $\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_U \le \delta(\varepsilon)$ implică inegalitatea $\|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2\|_F \le \varepsilon$, unde $\mathbf{z}_1=R(\mathbf{u}_1)$, $\mathbf{z}_2=R(\mathbf{u}_2)$; $\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2 \in F$, $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2 \in U$ iar simbolul $\|\ \|$ reprezintă norma euclidiană.

Pentru a da acestei definiții un caracter mai concret să considerăm că F și U sunt incluse în R^3. În acest caz $\mathbf{z}=R(\mathbf{u})$ este soluție stabilă a ecuației $\mathbf{Az}=\mathbf{u}$ dacă pentru orice sferă de rază r cu centrul în $\mathbf{z}_1$ există o sferă de rază $\delta(r)$ cu centrul în $\mathbf{u}_1$ astfel încât pentru orice $\mathbf{u}_2$ aflat în interiorul acestei sfere există un $\mathbf{z}_2$ aflat în sfera de rază r astfel încât $\mathbf{z}_2=R(\mathbf{u}_2)$, (Fig.1.1).

Problemele de sinteză care îndeplinesc condițiile 1),2),3) se încadrează în problemele corect puse și nu prezintă dificultăți suplimentare față de cele de analiză.

Este evident că în ultimă instanță caracterul operatorului **A** decide dacă problema este sau nu corect pusă.

Dacă operatorul **A** este continuu, înseamnă că U este un compact [1.26] (adică este o mulțime închisă care conține toate punctele de acumulare și este mărginită).

Dacă și operatorul $\mathbf{A}^{-1}$ este continuu atunci și F este un compact [1.26] și problema $\mathbf{Az}=\mathbf{u}$ devine o problemă corect pusă.

Dacă operatorul $\mathbf{A}^{-1}$ nu este continuu atunci F nu este un compact [1.26] (Fig.1.2) ceea ce înseamnă că la două valori $\mathbf{u}_1$ și $\mathbf{u}_2$ din U pot să corespundă două valori $\mathbf{z}_1$ și $\mathbf{z}_2$ în F distanțate oricât de mult.

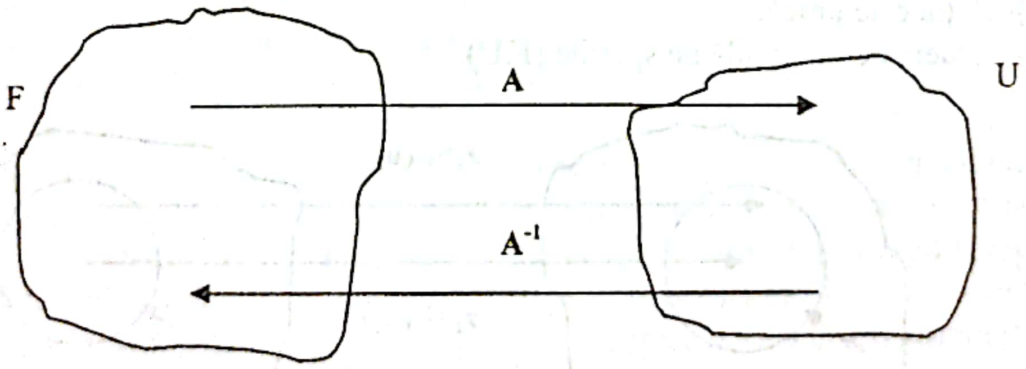


Fig.1.2. Operatorul A^{-1} nu este continuu, F nu este un compact,

În acest fel deziderатul de stabilitate 3) nu este satisfăcut și $\mathbf{Az}=\mathbf{u}$ devine o problemă incorect pusă.

Scanned with OKEN Scanner

S-a susţinut destul de mult timp că punerea corectă a condiţiilor (în sensul lui Hadamard) constituie un deziderat pe care trebuie să-l îndeplinească orice problemă matematică ce descrie un fenomen fizic sau tehnic. Pornind de la această concepţie problemele "incorect puse" nu au mai fost studiate până în deceniul şapte când au apărut lucrările [1.1], [1.2], [1.3].
Autorii acestor lucrări au abordat problemele incorect puse dintr-un punct de vedere nou şi au pus la punct metode de a găsi soluţii aproximative care să fie puţin sensibile la variaţii mici ale datelor iniţiale.

În esenţă, din punct de vedere matematic, problema se pune în felul următor:
Se consideră ecuaţia **Az=u** cu **(z,u)** aparţinînd spaţiilor metrice (F,U) ecuaţie care presupunem că este "incorect pusă".
Să mai presupunem că vectorul efect **u** este cunoscut cu o anumită aproximaţie δ. Aceasta înseamnă că în realitate în membrul drept al ecuaţiei figurează în loc de valoarea exactă **u** un element pe care să-l notăm **u'** , astfel că avem
$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}'\|_U \leq \delta$ sau $\|\mathbf{Az} - \mathbf{u}'\|_U \leq \delta$.

Soluţiile acestei ultime ecuaţii sunt soluţii aproximative ale ecuaţiei date formând toate submulţimea $Q_\delta \subset F$. Această submulţime include toate pseudosoluţiile ecuaţiei date, deci şi pseudosoluţiile normale.

Însă Q_δ poate să fie în general destul de mare, iar printre elementele ei pot să fie unele care să difere foarte mult de altele în metrica spaţiului F. Astfel încât nu toate elementele din submulţime pot fi socotite soluţii convenabile ale ecuaţiei date.

Se iveşte deci necesitatea de a găsi un criteriu de selecţie a valorilor posibile a fi socotite soluţii convenabile ale ecuaţiei **Az=u** .
Acest criteriu necesită folosirea unei informaţii suplimentare despre soluţia aproximativă căutată. Informaţia suplimentară poate fi de natură calitativă şi duce la metode de regularizare sau de natură cantitativă şi duce la metode de calcul ale pseudosoluţiilor şi soluţiilor normale precum şi la metoda de descompunere după valorile singulare [1.17].

În studiul de faţă, chestiunile legate de condiţionarea sistemelor, interpretarea geometrică a condiţionării, pseudosoluţii ale sistemelor degenerate şi rău condiţionate şi soluţii normale se consideră a fi fundamente matematice ale sintezei numerice de câmp.

De asemenea elementele de sinteză analitică bazate pe metoda separării variabilelor precum şi interpretarea rezultatelor se pot considera fundamentale pentru capitolul respectiv

Desigur că la aceste baze matematice s-ar mai putea adăuga şi alte capitole importante dar s-au reţinut numai chestiunile specifice sintezei.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE la capitolul 1

1.1.Tihonov, A.N., *Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method*, Soviet Math. Dokl., no.4, pp.1035-1038, 1963.

1.2.Phillips, D.L., *A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind* ,J.Assoc.Comp.Mach.9,1962.

1.3.Twomey, S., *On the numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by the inversion of the linear system produced by quadrature*, J.Assoc.Comp.Mach.10, 1963.

1.4.Pawluk, K., Rudnicki, M., *The state of art in the synthesis of electromagnetic fields*, ISEF 87 ,Pavia, pp.305-312, 1987.

1.5.Pawluk, K., Rudnicki, M., *Unified approach to the synthesis of electromagnetic field* ,Prace Instytutu Elektrotechniki,no147,pp.67-79,1987.

1.6.Guarnieri, M., Stella, A., Trevisan, F., *A methodological analysis of different formulation for solving inverse electromagnetic problems*, IEEE Trans. on magn.,Vol.26,no.2,pp.622-625,1990.

1.7.Neittaanmaki, P., Rudnicki, M., Savini, A., *Inverse problems and optimal design in electricity and magnetism*, Clarendon Press, Oxford University Inc.,New-York, 1996.

1.8.Ţopa, V., Rezolvarea problemelor inverse electromagnetice prin tehnici de optimizare, Casa cărţii de ştiinţă, Cluj-Napoca, 1998.

1.9.Mîndru, Gh., Rădulescu, M.M., *Analiza numerică a câmpului electromagnetic*, Ed.Dacia,Cluj-Napoca,1986.

1.10.Ţugulea, A., *Câteva exemple de sinteze de câmp magnetic în regim staţionar* St.cerc.energ. electr., Tom 14, Nr.4, pag.735-744, Bucureşti, 1964.

1.11.Micu, D., *Comparaison entre la méthode de la synthèse analytique Ţugulea et une méthode de synthèse numérique*, Revue roumaine des sciences techniques, série E.E, tome 38, vol.1, p.81-93, Bucarest, 1993.

1.12.Micu, D., Micu Adriana, *Synthesis of homogeneous field for Magnetic Resonance Imaging*, Proceedings of the 1st International Workshop "CAD in Electromagnetism and Electrical Circuits", pp.24-27, Cluj-Napoca, august, 1997.

1.13.Micu, D., *Numerical synthesis of electrostatic field by Monte Carlo method*, IEEE Trans. on magn., vol.29, pp.1966-1969, march.,1993.

1.14.Micu, D., Vlad,Simona, Micu,Adriana, *Performance of the Monte Carlo synthesis method in inhomogeneous media*, Proceedings of the 11th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, COMPUMAG, pp.569-570, Rio de Janeiro, Brazil, nov. 2-6, 1997.

1.15.Micu, Adriana, Micu, D., *Background of the Monte Carlo synthesis method in inhomogeneous media*, Proceedings of the 2nd International Workshop "CAD in

Scanned with OKEN Scanner

Electromagnetism and Electrical Circuits" CADEMEC'99, pp.37-40, Cluj-Napoca, 7-9 sept., 1999.
1.16.Micu, Adriana, Micu, D., De Mey, G., *Monte Carlo analysis method in inhomogeneous media with an application in identification problem*, Proceedings of the 13th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, COMPUMAG, pp., Evian, France, july 2-5, 2001.
1.17.Sikora, J., Skoczylas, J., Sroka, J., Wincenciak, S., *Singular value decomposition in identification of magnetic field modelled with finite elements*, Scientia Electrica, vol.32, no.3, pp.17-30, 1986.
1.18.Micu,D., Micu, Adriana, *The use of the Monte Carlo method in the synthesis of the Neumann's boundary problem*, International Symposium on Electromagnetic Fields in Electrical Engineering, ISEF 95, pp 41-44, Thessaloniki, september 25-27, 1995.
1.19.Munteanu, C., *Metoda elementului de frontieră*, Casa cărții de știință, Cluj-Napoca, 1998.
1.20.Micu, Adriana, Micu, D., Patachi, N., *Le nombre de condition*, Revue roumaine des sciences techniques, série E.E, tome 44, vol.2, p.121-134, Bucarest, 1999.
1.21. Micu, Adriana, Micu, D., Patachi, N., *Sur l'inégalité de Wielandt et Kantorovitch*, Revue roumaine des sciences techniques, série E.E, tome 44, vol.3, p.305-315, Bucarest, 1999.
1.22.Micu, D., *Synthèse d'un champ magnétique par la méthode de régularisation des équations intégrales Fredholm de première espèce*, Revue roumaine des sciences techniques, série E.E, tome 37, vol.3, p.283-293, Bucarest, 1992.
1.23.Micu, D., *Contributions à la synthèse du champ électromagnétique par la méthode de régularisation des systèmes dégénérés*, Revue roumaine des sciences techniques, série E.E, tome 38, vol.2, p.169-179, Bucarest, 1993.
1.24.Hadamard, J., *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique*, Bull. Univ. Princeton, no.13, 1932.
1.25.Hadamard, J., *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Herman P., Paris, 1932.
1.26.Roşculeț, M., *Analiza matematică*, E.D.P., Bucureşti, 1984.

Scanned with OKEN Scanner

2 SINTEZA DE CÂMP BAZATĂ PE METODA REGULARIZĂRII TIHONOV

2.1 BAZA MATEMATICĂ A METODEI REGULARIZĂRII

Metoda regularizării este cea mai importantă cale pentru rezolvarea problemelor "incorect puse".

Această metodă este fundamentată matematic în [2.1], dar prioritatea cercetărilor în acest domeniu este în egală masură împărțită de autorul acestei lucrări, A.N.Tihonov, cu matematicienii D.L.Philips şi S.Twomey.

Principiile elaborate de aceşti cercetători au dus la punerea la punct a unor metode de sinteză a câmpului electric şi magnetic. Un rol important în procesul de aplicare a metodei regularizării în ingineria electrică revine cercetătorilor polonezi, care în mod inevitabil au abordat şi fundamentele metodei regularizării [2.2], [2.3], [2.4], [2.5], [2.6], [2.7].

Dezvoltări interesante legate de această metodă se găsesc în lucrările mai recente ale danezului P.C.Hansen [2.8], [2.9] iar abordări mai succinte, dar riguroase, se află în trei cărți apărute în ultimii ani şi datorate unor colaborări internaționale [2.10], [2.11], [2.12]. La noi în țară prima lucrare având ca subiect metoda regularizării Tihonov apare în 1992 [2.13].

Cele de mai sus nu constituie un istoric al cercetărilor în domeniul regularizării ci atrage atenția asupra surselor care s-au avut în vedere la elaborarea acestui capitol.

2.1.1 FORMULAREA PROBLEMEI

Se consideră ecuația:

$$\mathbf{Az = u} \qquad (2.1)$$

unde $\mathbf{z} \in F$ şi $\mathbf{u} \in U$. Se precizează că **A** este un operator continuu pe F, dar $\mathbf{A}^{-1}$ nu este în general continuu pe U.

U şi F sunt spații metrice (metrica uzuală în aplicații este cea euclidiană). U este o mulțime închisă (conține toate punctele de acumulare) şi mărginită, deci este ceea ce se numeşte un compact, dar consecință a faptului că $\mathbf{A}^{-1}$ nu este continuu, F nu este în general un compact.

Variații mici ale membrului al doilea al ecuației (2.1) pot duce la variații oricât de mari ale soluției **z**, prin urmare (2.1) este ceea ce s-a numit o problemă "incorect pusă".

Scanned with OKEN Scanner

Distanța dintre elementele **u** și **v** aparținând mulțimii M, se va nota sub una din formele echivalente:

$$\rho_M(u,v) = \| \; u\text{-}v \; \|_M$$

Se consideră că membrul drept al ecuației (2.1) este cunoscut cu aproximația δ, așadar în loc de u_{ex} (valoarea exactă a lui **u**) necunoscută, în membrul drept al ecuației există în realitate valoarea u_δ, așa încât $\rho_U(u_\delta, u_{ex}) \leq \delta$.

În consecință, cum s-a arătat și înainte, este normal să se caute soluțiile aproximative în submulțimea $Q_\delta \subset F$ a elementelor **z** pentru care $\rho_U(Az, u_\delta) \leq \delta$. (Fig.2.1.)

Însă presupunând această submulțime aflată, nu se poate considera că un element oarecare $z_\delta \in Q_\delta$ este soluția aproximativă a ecuației (2.1) pentru că acest z_δ poate să nu fie continuu în raport cu δ și deci să difere foarte mult de o altă posibilă soluție aproximativă din submulțimea Q_δ.

Criteriul de selecție a soluțiilor aproximative ale ecuației (2.1), aplicat în

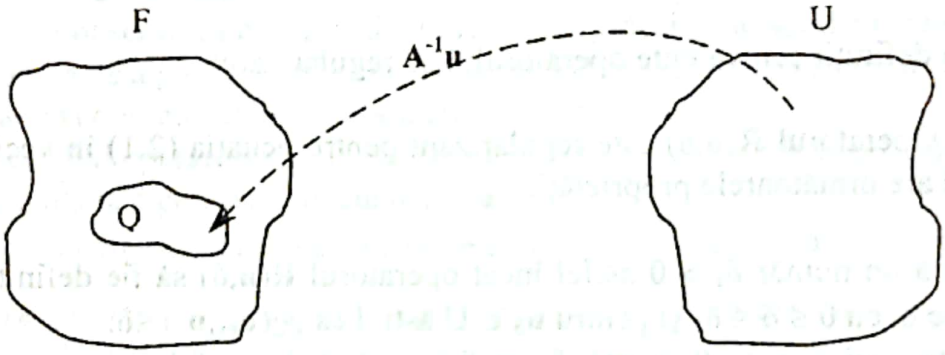


Fig.2.1 Submulțimea $Q_\delta \subset F$ a soluțiilor **z** unde $\rho_U(Az, u_\delta) \leq \delta$

submulțimea Q_δ va fi la această metodă unul de ordin calitativ, respectiv se va impune continuitatea în raport cu δ a soluțiilor **z**. Altfel spus se va impune ca mulțimea soluțiilor să aparțină unei mulțimi din Q_δ care să fie un compact.

Mulțimea valorilor din Q_δ care este un compact se va nota cu Q'_δ.

2.1.2 NOȚIUNEA DE OPERATOR DE REGULARIZARE

Din cele arătate mai sus este clar că nu se poate spune că $z_\delta = A^{-1}u_\delta$ este o soluție aproximativă a ecuației (2.1). Apare deci necesitatea de a introduce un așa-numit operator de regularizare care să-l exprime pe z_δ (în sensul că atunci când este îndeplinită condiția $\rho_U(u_\delta, u_{ex}) \to 0$ să rezulte $\rho_F(z_\delta, z_{ex}) \to 0$) și pe de altă parte acest operator să conțină deziderатul de continuitate (regularitate) al soluției z_δ.

Scanned with OKEN Scanner

Altfel spus operatorul de regularizare trebuie să fie operatorul invers al lui **A** care aplicat lui U ia valorile $z_\delta \in Q_\delta$ (Fig.2.2).

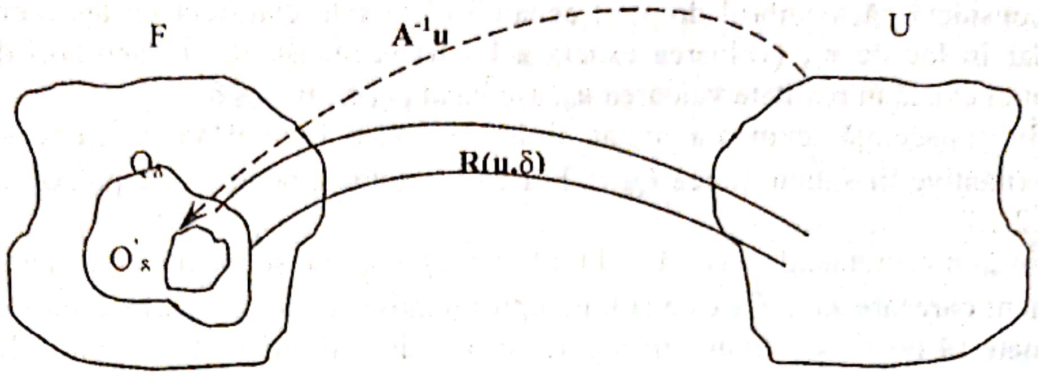


Fig.2.2 Operatorul de regularizare aplicat în U ia valori z_δ din mulțimea Q_δ

Se dau două definiții echivalente operatorului de regularizare:

Definiția 1. Operatorul $\mathbf{R}(\mathbf{u},\delta)$ este regularizant pentru ecuația (2.1) în vecinătatea $\mathbf{u} = \mathbf{u_{ex}}$ dacă are următoarele proprietăți:

a) există un număr $\delta_1 > 0$ astfel încât operatorul $\mathbf{R}(\mathbf{u},\delta)$ să fie definit pentru orice δ, cu $0 \le \delta \le \delta_1$ şi pentru $\mathbf{u}_\delta \in U$ astfel ca $\rho_U(\mathbf{u_{ex}},\mathbf{u}_\delta) \le \delta$;

b) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon,\mathbf{u_{ex}}) \le \delta_1$ astfel încât inegalitatea $\rho_U(\mathbf{u}_\delta,\mathbf{u_{ex}}) \le \delta \le \delta_0$ să implice $\rho_F(\mathbf{z}_\delta,\mathbf{z_{ex}}) \le \varepsilon$, unde $\mathbf{z}_\delta = \mathbf{R}(\mathbf{u}_\delta,\delta)$.

Se observă că definiția nu presupune că $\mathbf{R}(\mathbf{u}_\delta,\delta)$ este unic; $\mathbf{z}_\delta$ este un element oarecare al mulțimii$\{\ \mathbf{R}(\mathbf{u}_\delta,\delta)\ \}$ aşa cum se vede în Fig.2.3.

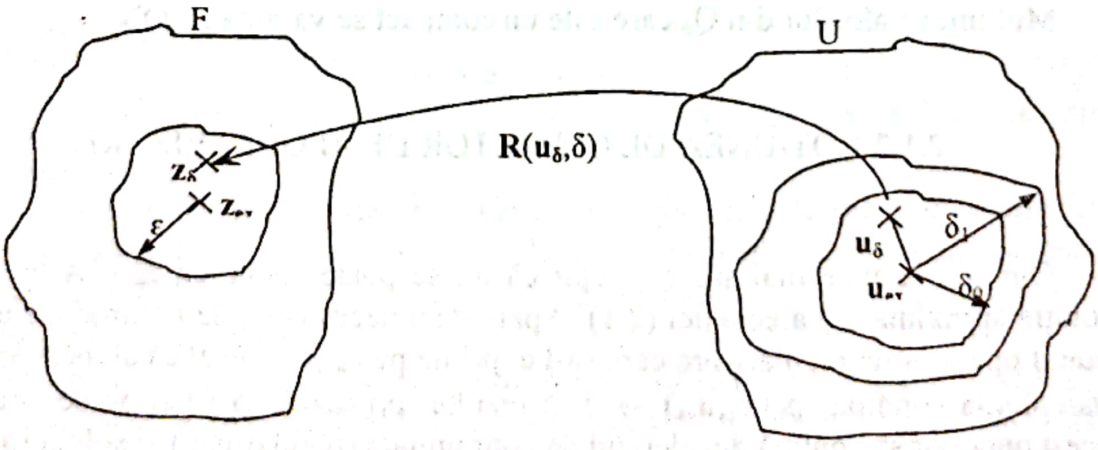


Fig.2.3 Operatorul de regularizare aşa cum rezultă din prima definiție

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că dacă F şi U sunt în spaţiul cu 3 dimensiuni, suprafeţele definite de δ_0, δ_1, şi ε sunt sferele de raze δ_0, δ_1, şi ε. Distanţa dintre $\mathbf{u}_\delta$ şi $\mathbf{u}_{ex}$ în mulţimea U este δ.

Pentru o folosire mai comodă a operatorului de regularizare se dă o definiţie echivalentă cu definiţia 1.

Definiţia 2. Un operator $\mathbf{R}(\mathbf{u},\alpha)$ funcţie de un parametru α este denumit operator de regularizare pentru ecuaţia (2.1) în vecinătatea $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ex}$ dacă are următoarele proprietăţi:

a) există un număr $\delta_1 > 0$ astfel încât operatorul $\mathbf{R}(\mathbf{u},\alpha)$ să fie definit pentru orice

$\alpha > 0$ şi pentru orice $\mathbf{u} \in U$ astfel ca $\rho_U(\mathbf{u},\mathbf{u}_{ex}) \le \delta \le \delta_1$

b) există o funcţie de δ, şi anume $\alpha = \alpha(\delta)$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) \le \delta_1$ astfel încât dacă $\mathbf{u}_\delta \in U$ şi $\rho_U(\mathbf{u}_{ex}, \mathbf{u}_\delta) \le \delta(\varepsilon)$ atunci $\rho_F(\mathbf{z}_\alpha,\mathbf{z}_{ex}) \le \varepsilon$, unde $\mathbf{z}_\alpha = \mathbf{R}(\mathbf{u}_\delta,\alpha(\delta))$

Se poate observa că $\alpha = \alpha(\delta)$ depinde şi de $\mathbf{u}_\delta$, deci şi de $\mathbf{u}_{ex}$ deci şi de $\mathbf{z}_{ex}$.

Problema de a găsi soluţiile aproximative ale ecuaţiei (2.1) se reduce la:

1) a găsi operatorul de regularizare

2) a defini operatorul de regularizare α după o informaţie suplimentară, ca de exemplu eroarea δ cu care este cunoscut $\mathbf{u}$.

Se demonstrează că dacă $\mathbf{R}(\mathbf{u},\alpha)$ este continuu în raport cu $\mathbf{u}$ şi $\lim_{\alpha \to 0} \mathbf{R}(\mathbf{Az},\alpha)=\mathbf{z}$, atunci $\mathbf{R}(\mathbf{u},\alpha)$ îndeplineşte condiţiile a) şi b) ale definiţiei 2 deci este un operator de regularizare [2.1].

2.1.3 FUNCŢIONALA STABILIZATOARE

Metoda regularizării este o metodă bazată pe un principiu variaţional.

Pentru a determina pe $\mathbf{z}_\alpha$ este necesar în prealabil să se introducă aşa numita funcţională stabilizatoare.

Se numeşte funcţională stabilizatoare $\Omega(\mathbf{z})$ o funcţională nenegativă, continuă, definită pe o submulţime $F_1 \subset F$ cu proprietăţile:

a) $\mathbf{z}_{ex}$ aparţine domeniului de definiţie F_1

b) pentru orice număr $d > 0$, mulţimea F_{1d} a elementelor $\mathbf{z}$ din F_1 pentru care $\Omega(\mathbf{z}) \le d$ este un compact pe F_1

Considerând o asemenea funcţională stabilizatoare $\Omega(\mathbf{z})$ definită pe F_1 (F_1 poate să coincidă cu F) se vor lua în considerare numai elementele din F_1 care aparţin

Scanned with OKEN Scanner

mulțimii Q_δ (mulțimea tuturor soluțiilor posibile ale ecuației (2.1)), deci se vor avea în vedere numai elementele din mulțimea $F_{1\delta} = Q_\delta \cap F_1$.

Cum $z_{ex} \in Q_\delta$ și $z_{ex} \in F_1$ rezultă $z_{ex} \in F_{1\delta}$ (Fig. 2.4)

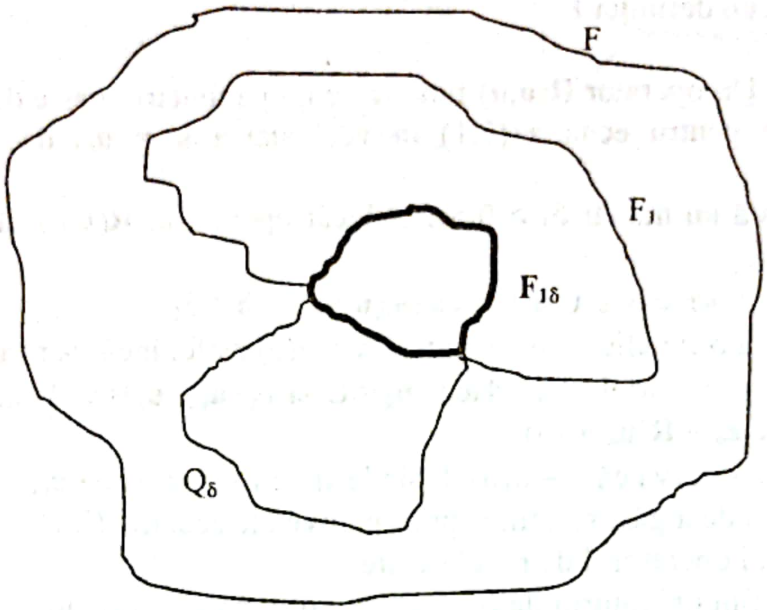


Fig.2.4 Funcționala stabilizatoare definită pe F_1

Printre elementele mulțimii $F_{1\delta}$ se va căuta elementul (sau elementele) care minimizează funcționala $\Omega(z)$.

Să presupunem că un astfel de element este z_δ.

Acest element poate fi considerat ca rezultat al acțiunii unui operator de forma $z_\delta = \underline{R}(u_\delta, \delta)$

Se demonstrează [2.1] că operatorul $z_\delta = \underline{R}(u_\delta, \delta)$ satisface condițiile din definiția 1, deci este un operator de regularizare, ceea ce duce la concluzia că $z_\delta = \underline{R}(u_\delta, \delta)$ este o soluție aproximativă a ecuației (2.1).

Din cele arătate până aici rezultă că determinarea operatorului de regularizare se poate façe în următoarele etape:

1) se află mulțimea $Q_\delta = \{ z \mid \rho_U(Az, u_\delta) \le \delta \}$

2) se caută minimul funcționalei $\Omega(z)$, fie m pe mulțimea $F_{1\delta} = F_1 \cap Q_\delta$

Rezultă $\Omega(z) \le m$ pentru elementele $z \in F_{1m} \subset F_{1\delta}$.

Aceste elemente constituie soluții stabile ale ecuației (2.1), pentru că din definiția funcționalei $\Omega(z)$ rezultă că F_{1m} este un compact. Aşadar soluțiile stabile ale ecuației (2.1) sunt elementele $z \in F_{1m}$.

Găsirea practică a operatorului de stabilizare pe această cale este în general foarte dificilă, astfel încât pentru a putea aplica principiul variațional se mai fac unele raționamente ce se prezintă mai departe.

Scanned with OKEN Scanner

2.1.4 FUNCȚIONALA DE LEGĂTURĂ

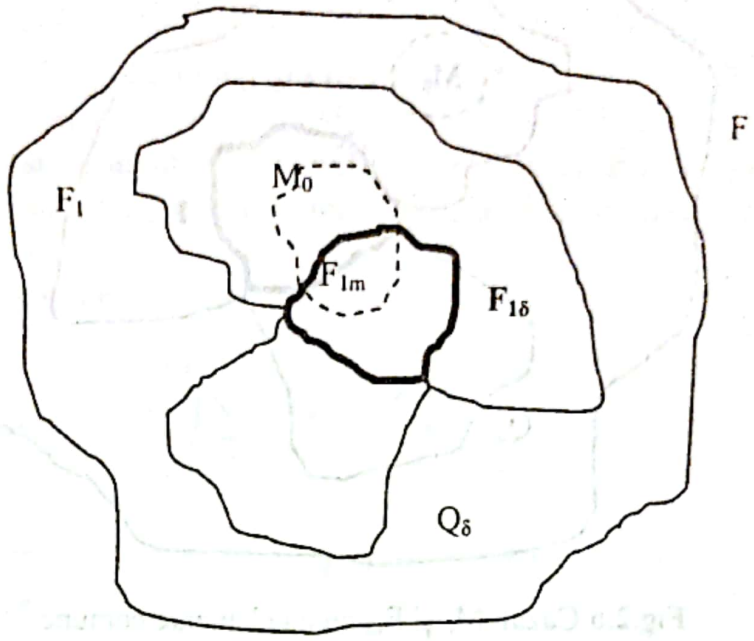


Fig.2.5 Cazul în care M_0 și $F_{1\delta}$ au elemente comune

Practic este mai convenabil de lucrat cu mulțimea elementelor care realizează minimul lui $\Omega(\mathbf{z})$ pe mulțimea F_1 (și nu pe $F_{1\delta}$).

Se consideră acum întregul domeniu de definiție F_1 al lui $\Omega(\mathbf{z})$ și se notează cu M_0 mulțimea elementelor pentru care $\Omega(\mathbf{z})$ își atinge minimul Ω_0, deci $\Omega_0 = \inf_{\mathbf{z}\in F_1} \Omega(\mathbf{z})$, .

Există două posibilități:

a)$M_0 \cap F_{1\delta} \neq \varnothing$, caz în care $M_0 \cap F_{1\delta} = F_{1m}$ și soluțiile sunt $\mathbf{z} \in F_{1m}$ (Fig.2.5)

b)$M_0 \cap F_{1\delta} = \varnothing$ (Fig.2.6)

Pentru acest caz se demonstrează că funcționala cvasimonotonă $\Omega(\mathbf{z})$ își atinge marginea inferioară pe mulțimea $F_{1\delta}$ pentru elementul $\mathbf{z}_\delta$ cu proprietatea $\rho_U(\mathbf{Az}_\delta, \mathbf{u}_\delta) = \delta$.

Observație: Prin cvasi-monotonie a funcționalei $\Omega(\mathbf{z})$ autorii [2.1] înțeleg că pentru orice element $\mathbf{z}_1 \in F_1$ și care nu aparține lui M_0 se găsește un element $\mathbf{z}_2 \in F_1$ și aparținând unei vecinătăți oarecare a lui $\mathbf{z}_1$, așa încât $\Omega(\mathbf{z}_2) < \Omega(\mathbf{z}_1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Pe baza celor de mai sus rezultă că în loc de a căuta minimul funcționalei

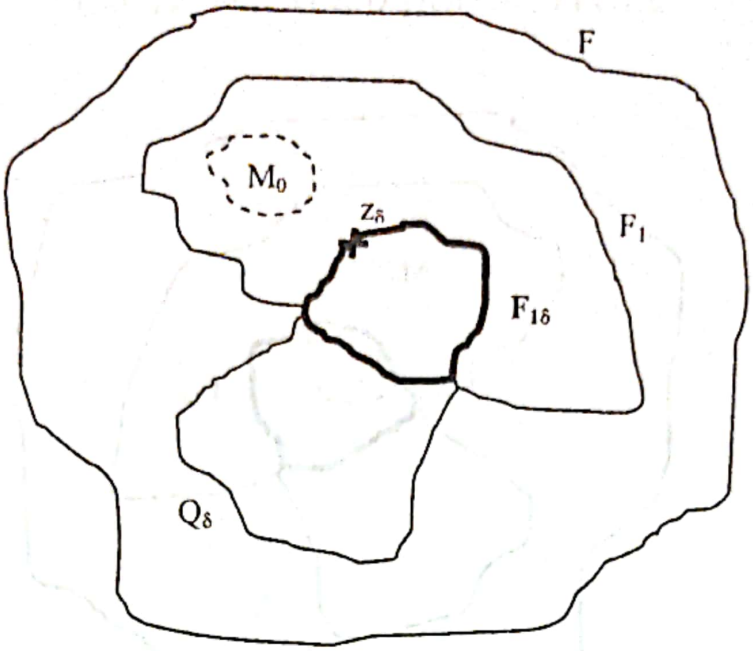


Fig.2.6 Cazul M_0 şi $F_{1\delta}$ nu au elemente comune

$\Omega(\mathbf{z})$ pe mulțimea $F_{1\delta}$ se poate căuta minimul funcționalei $\Omega(\mathbf{z})$ pe mulțimea F_1, cu condiția ca elementele căutate $\mathbf{z}$ să verifice egalitatea: $\rho_U(\mathbf{Az}, \mathbf{u}_\delta) = \delta$.

Aceasta este o problemă de extrem legat.

Se rezolvă prin minimizarea funcționalei aşa-zise de legătură:

$$M(\mathbf{z},\mathbf{u}_\delta) = \rho^2_U(\mathbf{Az},\mathbf{u}_\delta) + \alpha\,\Omega(\mathbf{z}) \qquad (2.2)$$

Dacă metoda lui Lagrange este realizabilă, adică dacă există α pentru care $\rho_U(\mathbf{Az}_\alpha,\mathbf{u}_\delta) = \delta$ atunci minimizarea lui $\Omega(\mathbf{z})$ şi a funcționalei $M^\alpha(\mathbf{z},\mathbf{u}_\delta)$ sunt echivalente.

Se observă că s-a pornit cu o problemă cu soluții instabile (2.1) şi s-a ajuns la o problemă stabilă la variațiile mici ale lui $\mathbf{u}$, aceea a minimizării funcționalei $M^\alpha(\mathbf{z},\mathbf{u}_\delta)$. Această stabilitate a fost realizată prin restricțiile impuse claselor de soluții posibile prin intermediul funcționalei $\Omega(\mathbf{z})$ care joacă un rol stabilizator.

2.1.5 ALEGEREA FUNCȚIONALEI STABILIZATOARE

Funcționala stabilizatoare trebuie să satisfacă condițiile stabilite anterior.

În [2.1] se arată că:

a) dacă mulțimea Φ a spațiului metric F admite o metrică $\rho_\Phi(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ cu proprietatea $\rho_F(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \le \rho_\Phi(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$

Scanned with OKEN Scanner

c) dacă sfera $\rho_\Phi(z, z_0) \le d$ cu centrul în z_0 este un compact în F (în metrica lui F) atunci există un $z_\alpha \in \Phi$ care minimizează funcționala

$$M^\alpha(z,u) = \rho^2_U(Az,u) + \alpha\,\Omega(z) \qquad (2.3)$$

unde:

$$\Omega(z) = \rho^2_\Phi(z,0) \qquad (2.4)$$

Folosind acest rezultat se arată că cel mai potrivit spațiu Φ este spațiul Sobolev W_2^p, adică spațiul funcțiilor de pătrat integrabil, admițând derivate generalizate până la ordinul p inclusiv.

Metrica acestui spațiu este:

$$\rho_{W_2^p}(z_1,z_2) = \left[\int_a^b \sum_{r=0}^{p} q_r(x)\left(\frac{d^r z}{dx^r}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (2.5)$$

unde: $z = z_1 - z_2$, iar $q_r(x)$, $(r = 0,1,2\ldots p)$ reprezintă funcții continue nenegative cunoscute, dar $q_p(x) > 0$.

Funcționala stabilizatoare este deci:

$$\Omega(z) = \int_a^b \sum_{r=0}^{p} q_r(x)\left(\frac{d^r z}{dx^r}\right)^2 dx \qquad (2.6)$$

Se arată că această funcțională realizează cea mai bună "legătură" în funcționala de minimizat.

Acest tip de funcțională se numește stabilizator de ordin p, iar dacă funcțiile $q_r(x)$ sunt constante atunci rezultă un stabilizator de ordin p cu coeficienți constanți (stabilizator Tihonov).

Stabilizatorul Tihonov în W^0_2 este:

$$\Omega(z) = \int_a^b q_0 z^2 dx \qquad (2.7)$$

iar în W^1_2

$$\Omega(z) = \int_a^b \left(q_0 z^2 + q_1 (z')^2\right) dx \qquad (2.8)$$

Scanned with OKEN Scanner

2.1.6 DETERMINAREA PARAMETRULUI DE REGULARIZARE

Importanța practică a acestei probleme este deosebită însă determinarea lui $\alpha = \alpha(\delta)$(care introdus în expresia operatorului de regularizare $\mathbf{R}(\mathbf{u},\alpha(\delta))$ să dea direct soluția) este extrem de dificilă.

În general δ este relativ uşor de estimat pe baza preciziei de aflare a informației inițiale $\mathbf{u}$, însă pentru α lucrurile se complică.

Practic trebuie precizat că sistemul de ecuații care rezultă din (2.2) se poate rezolva numai dacă α este cunoscut.

Metoda folosită în cele mai multe cazuri este următoarea:

Se consideră un şir de valori $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, care poate fi de exemplu o parte dintr-o progresie geometrică.

$$\alpha_k = \alpha_0 q^k, \qquad q>0 \tag{2.9}$$

Pentru fiecare valoare α_k se află $\mathbf{z}_{\alpha k}$ care minimizează funcționala (2.2). Se calculează reziduul $\rho_U(\mathbf{Az}_{\alpha k}, \mathbf{u}_\delta)$ pentru fiecare soluție.

Valoarea convenabilă a lui α va fi acea valoare α_k care realizează cea mai bună aproximare pentru ecuația:

$$\rho_U(\mathbf{Az}_{\alpha k},\mathbf{u}_\delta) = \delta \tag{2.10}$$

unde δ se presupune cunoscut, cu condiția ca soluția să fie convenabilă din punctul de vedere al realizabilității.

Aşadar cu această metodă determinarea lui α şi a soluției $\mathbf{z}_\alpha$ are loc simultan.

Soluția aproximativă a ecuației (2.10) în raport cu α se poate afla şi cu metoda tangentei lui Newton [2.1].

În [2.5] se dă o metodă de estimare a lui α pe baza unui calcul aleator al erorilor membrului drept al ecuației (2.1).

În general se poate spune că eficacitatea unei metode oarecare de estimare a lui α se poate face numai efectuând un calcul experimental.

În cap.4.3 se propune o metodă originală de aflare a domeniului cel mai potrivit pe care trebuie căutat parametrul de regularizare, iar în cap.9.1.7, aplicativ, se exemplifică o metodă grafică de aflare a parametrului de regularizare optim.

Pornind de la principiile enunțate în acest capitol s-au dezvoltat două direcții de aplicare a metodei regularizării: metoda regularizării în rezolvarea ecuației integrale Fredholm de ordinul întâi şi metoda regularizării sistemelor degenerate, metode care se vor prezenta în continuare cu demonstrații complete pe care nu le-am întâlnit nicăieri în literatura consultată.

Scanned with OKEN Scanner

2.2 METODA REGULARIZĂRII ÎN REZOLVAREA ECUAȚIEI INTEGRALE FREDHOLM DE ORDINUL ÎNTÂI

2.2.1 FORMULAREA PROBLEMEI

Un mare număr de probleme de sinteză a câmpului electric şi magnetic se reduc la aşa-numita ecuaţie integrală Fredholm de ordinul întâi.

$$\int_a^b K(x,s)z(s)\,ds = u(x) \qquad (2.11)$$

În această ecuaţie u(x) reprezintă funcţia care se cere a fi realizată prin procesul de sinteză (funcţie dată cu o precizie δ, sau funcţie reprezentând o mărime care poate fi măsurată cu o precizie δ).

Intervalul pe care se cere funcţia este precizat, $x \in [c, d]$, iar $u(x) \in L_2[c, d]$ unde L_2 este mulţimea funcţiilor de pătrat integrabil.

z(s) este funcţia cerută, cu domeniul de definiţie intervalul [a, b].

K(x, s) este o funcţie aflată în urma aplicării legilor câmpului, funcţie care face legătura între funcţia cauză şi funcţia efect. Este numită funcţie nucleu.

Se foloseşte stabilizatorul de ordinul întâi, deci soluţia $z_\alpha(s)$ se va căuta în spaţiul Sobolev W_2^1, astfel încât să minimizeze funcţionala de legătură (2.2) scrisă sub forma:

$$M^\alpha(z,u_\delta) = \rho^2_U(Az,u_\delta) + \alpha\,\Omega(z)$$

S-a renunţat la scrierea vectorială datorită felului în care s-au definit mărimile care intervin.

În cazul problemei noastre A este operatorul integral Fredholm de ordinul întâi:

$$Az = \int_a^b K(x,s)\,z(s)\,ds \qquad (2.12)$$

u_δ este u(x); spaţiul U este $L_2[c, d]$ aşa încât:

$$\rho^2_U(Az,u_\delta) = \int_c^d \left[\int_a^b K(x,s)\,z(s)\,ds - u(x)\right]^2 dx \qquad (2.13)$$

Scanned with OKEN Scanner

În majoritatea cazurilor practice se adoptă stabilizatorul cu coeficienți constanți, dar pentru generalitate aici se vor considera coeficienții variabili, așadar se va lua

$$\Omega(z)=\int_a^b \{q_0(s)z^2(s)+q_1(s)[z'(s)]^2\}\ ds \qquad (2.14)$$

Așadar z(s) este definită în W_2^1 [a, b], și este o funcție de pătrat integrabil.

Cu aceste notații se poate afirma că rezolvarea aproximativă a ecuației integrale Fredholm de ordinul întâi (2.11), care este o problemă "incorect pusă" [2.1] în sensul că variații mici ale lui u(x) pot duce la variații mari ale soluției z(s), revine la a găsi soluția regularizată z_α (s) care minimizează funcționala:

$$M^\alpha(z,u)=\int_c^d\left[\int_a^b K(x,s)z(s)\ ds-u(x)\right]^2 dx+ \qquad (2.15)$$
$$+\alpha\int_a^b \{q_0(s)z^2(s)+q_1(s)[z'(s)]^2\}\ ds$$

Se va afla în continuare condiția de minimizare a funcționalei de legătură cu toate restricțiile ce le impune.

2.2.2 CONDIȚIA DE EXTREM A UNEI FUNCȚIONALE

Se consideră o funcțională:

$$M(z)=\int_a^b \varphi(s, z(s), z'(s))\ ds \qquad (2.16)$$

definită pe spațiul normat [a, b].

Prima variație a acestei funcționale este [2.14]:

$$\Delta M(z)(h)=\int_a^b\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}h(s)+\frac{\partial\varphi}{\partial z'}h'(s)\right]ds \qquad (2.17)$$

Se integrează prin părți termenul al doilea:

Scanned with OKEN Scanner

$$\int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial z'} h'(s)\, ds = h(s) \frac{\partial \varphi}{\partial z'}\Big|_a^b - \int_a^b h(s) \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z'}\right) ds \qquad (2.18)$$

şi rezultă:

$$\Delta M(z)\,(h) = \int_a^b \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z'}\right)\right] h(s)\, ds + h(s) \frac{\partial \varphi}{dz'}\Big|_a^b \qquad (2.19)$$

unde h(s) este o funcţie continuă arbitrară care exprimă o variaţie a funcţiei z(s).

Dacă în problema de minimizare valorile funcţiei z(s) în punctele a şi b sunt impuse, fie z(a) = p, z(b) = q, atunci cum z + h trebuie să satisfacă aceleaşi condiţii în punctele a şi b rezultă că h(a) = 0 şi h(b) = 0, ceea ce duce la:

$$h(s) \frac{\partial \varphi}{\partial z'}\Big|_a^b = h(b)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z'}\right)_b - h(a)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z'}\right)_a = 0 \qquad (2.20)$$

În literatura matematică se consideră că funcţia z(s) este fixată în a şi b şi deci în (2.19) se foloseşte restricţia (2.20).

În problemele practice de sinteză nu întodeauna se poate cunoaşte funcţia cerută z(s) în capetele intervalului, dar restricţia (2.20) trebuie să fie neapărat satisfăcută.

Concluzia este clară: dacă nu se cunoaşte z(a) şi z(b), trebuie impusă condiţia

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z'}\right)_b = 0 \qquad (2.21)$$

şi

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z'}\right)_a = 0 \qquad (2.22)$$

care vor satisface restricţia (2.20), independent de h(a) şi h(b).

Se caută semnificaţia acestei concluzii pentru problema practică. Observând că z' intervine numai în a doua integrală din (2.15) rezultă:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z'}\right)_b = 0 \quad \Rightarrow \quad 2q_1(b)\, z'(b) = 0 \qquad (2.23)$$

şi

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z'}\right)_a = 0 \quad \Rightarrow \quad 2q_1(a)\, z'(a) = 0 \qquad (2.24)$$

Scanned with OKEN Scanner

Condițiile $z'(a) = 0$ și $z'(b) = 0$ se impun ușor în cazul discretizării intervalului [a, b] printr-o rețea de pas h: $z(a) = z(a + h)$ sau $z(a - h) = z(a)$ sau $z(a - h/2) == z(a + h/2)$ și corespunzător pentru b.

Observație: (2.20) este adevărată și dacă se impune una din condițiile $z(a) = p$ sau $z(b) = q$, împreună cu una din condițiile $z'(a) = 0$ și $z'(b) = 0$. Dacă se ia

$$q_1(s) = -(s - a)(s - b) \tag{1.25}$$

atunci relația (2.20) este automat satisfăcută. În această direcție problema este deschisă cercetărilor.

Se revine cu raționamentul la nivelul relației (2.19) care cu condiția (2.20) (satisfăcută într-un fel sau în altul, cum s-a arătat) devine:

$$\Delta M(z)(h) = \int_a^b \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z'} \right) \right] h(s)\, ds \tag{2.26}$$

Condiția de extrem a funcționalei (2.16) se obține din anularea variației întâi a funcționalei:

$$\Delta M(z)(h) = 0 \tag{2.27}$$

Cum h(s) este arbitrară, condiția de extrem este:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z'} \right) = 0 \tag{2.28}$$

cunoscută sub numele de ecuația lui Euler.

Condiția ca funcția $z_0(s)$ care realizează extremul să realizeze un minim al funcționalei (2.16) este:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial (z')^2}\Big|_{z=z_0} \geq 0$$

cunoscută sub numele de condiția lui Legendre.

În cazul funcționalei (2.15)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial (z')^2} = 2q_1(s)$$

nu depinde de z_0 și $q_1(s) > 0$, condiție conținută explicit în teoria stabilizatorului, deci orice extrem este automat un minim.

Scanned with OKEN Scanner

2.2.3 CONDIȚIA DE MINIMIZARE A FUNCȚIONALEI DE LEGĂTURĂ

În rezumat, pentru o funcțională cum este (2.16) supusă restricției (2.20) condiția de extrem este (2.28). Pentru funcționala (2.15) cu restricția (2.20) discutată anterior şi presupusă a fi satisfăcută, condiția (2.28) este condiție de minimizare.

Pentru a putea pune condiția (2.28) relația (2.15) trebuie adusă în prealabil la forma (2.16).

Cum integrala a doua din (2.15), stabilizatorul, este deja la forma dorită, se va transforma prima integrală:

$$\int_c^d \left[\int_a^b K(x,s)\,z(s)\,ds - u(x)\right]^2 dx = \int_c^d \left[\int_a^b K(x,s)\,z(s)\,ds\right]^2 dx - \\ -2\int_c^d \left[\int_a^b K(x,s)\,z(s)\,u(x)\,ds\right] dx + \int_c^d u^2(x)\,dx \tag{2.29}$$

Pentru primul termen din membrul al doilea al relației (2.29) se folosește un artificiu de calcul şi rezultă succesiv:

$$\int_c^d \left[\int_a^b K(x,s)\,z(s)\,ds\right]^2 dx = \int_c^d \left[\int_a^b K(x,s)\,z(s)\,ds \cdot \int_a^b K(x,t)\,z(t)\,dt\right] dx = \\ = \int_c^d \left[\int_a^b \int_a^b K(x,s)\,K(x,t)\,z(s)\,z(t)\,dt\,ds\right] dx \tag{2.30}$$

Intervertind ordinea de efectuare a integralelor multiple din (2.29) şi (2.30) funcționala (2.15) se poate scrie astfel:

$$M^{\alpha}(z,u) = \int_a^b \left[\int_a^b \int_c^d K(x,s)\,K(x,t)\,z(s)\,z(t)\,dx\,dt - 2\int_c^d K(x,s)\,z(s)\,u(x)\,dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{b-a}\int_c^d u^2(x)\,d(x) + \alpha\,q_0(s)\,z^2(s) + \alpha\,q_1(s)\,(z'(s))^2 \right] ds \tag{2.31}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că (2.31) este de forma (2.16), unde funcția φ este cea de sub prima integrală.

Se poate acum aplica condiția de minimizare (2.28) și rezultă:

$$\int_a^b\int_c^d K(x,s)K(x,t)z(t)dx\,dt - \int_c^d K(x,s)u(x)dx + \\ + \alpha q_0(s)z(s) - \alpha q_1'(s)z'(s) - \alpha q_1(s)z''(s) = 0 \tag{2.32}$$

Se obișnuiește să se noteze în concordanță cu (2.12)

$$A^*u = \int_c^d K(x,s)u(x)dx \tag{2.33}$$

unde A^* este numit operator adjunct

$$\overline{K}(s,t) = \int_c^d K(x,s)K(x,t)dx \tag{2.34}$$

și

$$A^*Az = \int_a^b \overline{K}(s,t)z(t)dt \tag{2.35}$$

unde A^*A este numit operator auto-adjunct.

Dacă se mai notează:

$$L_z = q_0(s)z(s) - \frac{d}{ds}[q_1(s)z'(s)] \tag{2.36}$$

atunci ecuația (2.32) se poate scrie sub forma restrânsă

$$A^*Az + \alpha L_z = A^*u \tag{2.37}$$

Se mai spune că L_z este operatorul care asigură derivarea lui $\Omega(z)$ în sensul lui Frèchet și în acest caz ecuația (2.32) sau (2.37) capătă forma:

$$A^*Az + \alpha\,\Omega'(z) = A^*u \tag{2.38}$$

Scanned with OKEN Scanner

2.2.4 FORMA NUMERICĂ A ECUAȚIEI INTEGRALE FREDHOLM DE ORDINUL ÎNTÎI

În aplicațiile practice ecuația (2.32) se rezolvă numeric, derivatele exprimându-se cu metoda difrențelor finite. Etapele de calcul sunt prezentate în continuare.

Domeniul lui s, intervalul [a, b] se împarte în n părți, se presupune egale, pentru simplitate.

Se notează:

$$h = \frac{b-a}{n} \tag{2.39}$$

Diviziunea intervalului se notează sub forma:
$(a = s_0, s_1, s_2 \ldots s_j \ldots s_n = b)$, unde $s_j = a + jh$. Valoarea funcției z în punctul s_j se notează:

$$z(s_j) = z_j$$

Domeniul lui x, intervalul [c, d] se împarte obligatoriu în același număr de părți n.

Se notează:

$$h_1 = \frac{d-c}{n} \tag{2.40}$$

Se face observația că în unele aplicații practice domeniile lui s și x pot să coincidă.

Diviziunea intervalului [c, d] se notează sub forma $(c = x_0, x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n = d)$ unde $x_i = c + ih_1$.

Sunt evidente ca semnificație notațiile:
$u(x_i) = u_i$; $K(x_i, s_j) = K_{ij}$; $q_0(s_j) = q_{0j}$; $q_1(s_j) = q_{1j}$; $q_1'(s_j) = q_{1j}'$.

Se observă că variabila t are aceeași semnificație ca și s, deci $K(x_i, t_j) = K_{ij}$.

Folosind diferențele finite se poate scrie:

$$z'(s_j) = z'_j = \frac{z_{j+1} - z_{j-1}}{2h} \tag{2.41}$$

și

$$z''(s_j) = z''_j = \frac{z_{j+1} - 2z_j + z_{j-1}}{h^2} \tag{2.42}$$

Cu aceste notații, integralele devin pentru un j fixat

Scanned with OKEN Scanner

$$\int_c^d K(x,s)\,u(x)\,dx = h_1 \sum_{i=1}^{n} K_{ij} u_i \tag{2.43}$$

$$\int_a^b \int_c^d K(x,s)K(x,t)z(t)\,dx\,dt = \int_a^b \left[\int_c^d K(x,s)K(x,t)\,dx\right] z(t)\,dt = \tag{2.44}$$

$$\sum_{l=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n} K_{ij}K_{il}h_l\right] z_l \cdot h = h\sum_{l=1}^{n} \overline{K}_{jl} z_l$$

În felul acesta ecuația (2.32) se scrie, pentru un j fixat:

$$z_{j-1}\left(\frac{\alpha q_{1j}}{2h} - \frac{\alpha q_{1j}}{h^2}\right) + z_j\left(\alpha q_{0j} + \frac{2\alpha q_{1j}}{h^2}\right) + \tag{2.45}$$

$$+ z_{j+1}\left(-\frac{\alpha q'_{1j}}{2h} - \frac{\alpha q_{1j}}{h^2}\right) + \sum_{l=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n} K_{ij}K_{il}h_l\right] z_l\, h = \sum_{i=1}^{n} K_{ij}u_i h_l$$

Se face j = 1,2,...n şi rezultă un sistem de n ecuaţii cu n necunoscute $z_1, z_2, \ldots z_n$.

Se observă că pentru j = 1 în ecuaţia (2.45) apare o necunoscută suplimentară şi anume $z_0 = z(s_0) = z(a)$, iar pentru j = n apare o altă necunoscută suplimentară, z_{n+1}. Ele se tratează astfel:

1) dacă în problema de sinteză nu sunt impuse valorile z(a) şi z(b), atunci conform restricţiei (2.20) se va lua $z_0 = z_1$ şi $z_{n+1} = z_n$, introducând notaţiile respective prin program.

2) dacă sunt impuse valorile z(a) = p şi z(b) = q, atunci evident că $z_0 = p$ şi $z_n = q$ se vor trece în membrul drept prin program, iar z_{n+1} va deveni a n-a necunoscută. În această situaţie, cum z_{n+1} apare numai în ultima ecuaţie şi valoarea ei nu are semnificaţie fizică, se poate renunţa la ultima ecuaţie, rezolvându-se un sistem de n-1 ecuaţii cu n-1 necunoscute $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$.

3) dacă este impusă numai valoarea în punctul a, z(a) = p, atunci se ia $z_0 = p$ şi
$z_{n+1} = z_n$.

4) dacă este impusă numai valoarea în punctul b, z(b) = q, atunci se ia $z_n = q$ şi
$z_0 = z_1$.

Eventual se poate renunţa în acest caz la ultima ecuaţie.

În cazul 1) este convenabil să se pună $s_j = a + (j-1/2)h$, j = 1,2,...n.

Scanned with OKEN Scanner

În majoritatea aplicațiilor practice se alege stabilizatorul cu coeficienți constanți, deci $q_0(s) = q_1(s) = 1$.

În această situație, pentru j fixat ecuația (2.45) devine:

$$z_{j-1}\left(-\frac{\alpha}{h^2}\right)+z_j\left(\alpha+\frac{2\alpha}{h^2}\right)+z_{j+1}\left(-\frac{\alpha}{h^2}\right)+h\sum_{l=1}^{n}\overline{K}_{jl}\,z_l = h_1\sum_{i=1}^{n}K_{ij}u_i \qquad (2.46)$$

Se face j = 1, 2, ...n şi rezultă sistemul cerut.

Se rezolvă sistemul pentru diferite valori ale lui α calculându-se pentru fiecare soluție eroarea:

$$\varepsilon = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}K_{ij}h\,z_j - u_i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (2.47)$$

Compararea acestei erori cu δ (dacă acesta este cunoscut) dezideratul de precizie (un ε cât mai mic) conjugat cu dezideratul de realizabilitate duce la determinarea soluției optime.

2.3 METODA REGULARIZĂRII APLICATĂ SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE DEGENERATE

2.3.1 FORMULAREA PROBLEMEI

O problemă de proiectare prin sinteză de câmp electromagnetic presupune parcurgerea succesivă a trei etape: stabilirea modelului fenomenologic, alegerea modelului matematic şi prelucrarea acestui model. În urma acestor etape se obține în unele cazuri un sistem de m ecuații algebrice liniare cu n necunoscute, de forma

$$\mathbf{A}\,\mathbf{z} = \mathbf{u} \qquad (2.48)$$

În această ecuație **A** este o matrice cu m linii şi n coloane, **z** este o matrice coloană cu n linii iar **u** este o matrice coloană cu m linii, toate fiind definite în mulțimea numerelor reale.

În teoria sintezei de câmp electromagnetic **u** este numit uneori vector cauză iar **z** este numit vector efect.

Scanned with OKEN Scanner

Atunci când numărul de informaţii depăşeşte numărul mărimilor care trebuie determinate în procesul de proiectare, rezultă mai multe ecuaţii m decât necunoscute n şi sistemul este supradeterminat.

Este posibilă de asemenea situaţia când numărul informaţiilor este mai mic decât numărul mărimilor cerute şi rezultă un număr m de ecuaţii mai mic decât numărul de necunoscute n şi sistemul este subdeterminat.

Cazul mai des întâlnit este când numărul de informaţii şi numărul de date cerute prin procesul de proiectare coincid, deci numărul de ecuaţii este acelaşi cu numărul de necunoscute.

În toate cele trei cazuri, din punct de vedere matematic, sistemul de ecuaţii poate fi compatibil (determinat sau nedeterminat) sau incompatibil.
Să analizăm pe rând situaţiile care se pot ivi.

a)Sistemul de ecuaţii este compatibil.
În acest caz sistemul poate fi nedegenerat (rangul matricei sistemului, r, este egal cu numărul de necunoscute şi toţi determinanţii caracteristici, dacă există, sunt nuli) sau poate fi degenerat (rangul matricei sistemului, r, este mai mic decât mumărul de necunoscute şi toţi determinanţii caracteristici ai sistemului, dacă există, sunt de asemenea nuli).
În primul caz sistemul are soluţie unică, adică este compatibil determinat, iar în al doilea caz sistemul admite o infinitate de soluţii, deci este compatibil nedeterminat.

În ambele situaţii norma euclidiană a matricei erorii (care este numită şi matricea rest sau uneori matricea reziduu) este nulă.

$$\| \mathbf{Az-u} \| = 0 \qquad (2.49)$$

Dacă există o singură soluţie, singura problemă care se pune este în ce măsură această soluţie este realizabilă din punct de vedere tehnic, dacă convine din punctul de vedere al exigenţelor impuse de proiect.
Dacă există o infinitate de soluţii, se pune întrebarea care dintre aceste soluţii este cea mai potrivită pentru a fi realizată practic.
Din punct de vedere matematic, dar în multe cazuri şi din punct de vedere tehnic, cea mai potrivită soluţie se socoteşte a fi soluţia de normă euclidiană minimă, raportată la un vector fixat, $\mathbf{z_f}$. Această soluţie se numeşte soluţie normală şi se va nota cu $\mathbf{z^0}$.
Dacă notăm cu $\mathbf{z_p}$ mulţimea soluţiilor ecuaţiei, atunci relaţiile de definiţie a soluţiei normale sunt

$$\| \mathbf{Az_p-u} \| = 0 \quad \text{şi} \quad \| \mathbf{z^0-z_f} \| \leq \| \mathbf{z_p-z_f} \| \qquad (2.50)$$

De menţionat că frecvent se ia $\mathbf{z_f} = 0$.

b)Sistemul de ecuaţii este incompatibil.

Scanned with OKEN Scanner

În acest caz sistemul de ecuații este degenerat (rangul sistemului, r, este mai mic decât numărul de ecuații, m, și cel puțin unul dintre determinanții caracteristici este nenul).

Pornind de la ideea că soluția sistemului este răspunsul la o problemă tehnică, se vor căuta soluții aproximative pentru sistemul degenerat. Există, evident, o infinitate de soluții aproximative. Se pune întrebarea care este cea mai potrivită pentru a fi soluția problemei tehnice.

Din punct de vedere matematic, iar uneori și din punct de vedere tehnic, se consideră că cea mai potrivită soluție aproximativă este cea pentru care norma euclidiană a erorii $\| \mathbf{Az-u} \|$ este minimă.

Este posibil ca mai multe soluții aproximative să îndeplinească condiția ca norma erorii să fie minimă. Aceste soluții aproximative se numesc pseudosoluții și se notează $\mathbf{z_p}$. Relația de definiție a pseudosoluțiilor este:

$$\| \mathbf{Az_p-u} \| \leq \| \mathbf{Az-u} \| \qquad (2.51)$$

Din mulțimea pseudosoluțiilor se pot reține cele de normă minimă, raportate la un vector fixat $\mathbf{z_f}$ a cărei valoare este luată în funcție de datele problemei concrete, foarte frecvent $\mathbf{z_f=0}$.

Pseudosoluțiile de normă minimă se numesc pseudosoluții normale și se notează $\mathbf{z^0}$. Relațiile prin care se definesc pseudosoluțiile normale sunt:

$$\| \mathbf{Az_p-u} \| \leq \| \mathbf{Az-u} \| \text{ și } \| \mathbf{z^0-z_f} \| \leq \| \mathbf{z_p-z_f} \| \qquad (2.52)$$

Se observă că în cazul a) se pot aplica relațiile de definiție (2.51) și (2.52). Într-adevăr, soluțiile sistemului compatibil se pot socoti pseudosoluții, pentru că norma erorii este nulă, deci minimă. În ceea ce privește soluția normală de la a), definiția este identică cu definiția pseudosoluției normale de la b).

În concluzie, sistemul de ecuații (2.48), degenerat sau nedegenerat, are ca soluții exacte sau aproximative așa-numitele pseudosoluții, care realizează norma minimă a vectorului eroare $\| \mathbf{Az_p-u} \|_{minim}$.

Dintre aceste pseudosoluții se pot alege apoi pseudosoluțiile de normă (raportată) minimă $\| \mathbf{z_p-z_f} \|_{minim} = \| \mathbf{z^0-z_f} \|$ sau $\| \mathbf{z_p} \|_{minim} = \| \mathbf{z^0} \|$.

Este posibil însă ca nici pseudosoluțiile și nici pseudosoluțiile normale să nu fie convenabile din punct de vedere tehnic. Cel mai frecvent caz este atunci când soluția rezultată nu se poate realiza practic, din motive evidente de ordin tehnologic.

Scanned with OKEN Scanner

Să reținem că din punct de vedere matematic pseudosoluțiile sunt cele mai precise din soluțiile posibile, asigurând eroare minimă, iar dintre aceste pseudosoluții, pseudosoluțiile normale par a fi cele mai convenabile dacă ne gândim că au norma minimă, deci cea mai mare șansă de a se putea realiza practic.

Există însă și o altă posibilitate de abordare a sistemului (2.48).

2.3.2 REGULARIZAREA SISTEMELOR DEGENERATE

Condiția impusă pseudosoluțiilor (de a duce la norma erorii minimă) este foarte bună din punctul de vedere al preciziei cu care sunt satisfăcute condițiile cerute de problema de proiectare. Pseudosoluțiile normale pot fi alese numai din aceste pseudosoluții, ceea ce înseamnă că pot exista soluții aproximative care să nu fie pseudosoluții dar care să aibă norma mai mică decât norma pseudosoluțiilor normale.

Dacă din punctul de vedere al normei erorii aceste soluții aproximative sunt convenabile, ele reprezintă o alternativă viabilă la pseudosoluțiile normale.

Această alternativă este realizată de regularizare.

Soluția regularizată este soluția care minimizează funcționala de legătură

$$M^{\alpha}(\mathbf{z},\mathbf{u}) = \rho^2_U(\mathbf{Az},\mathbf{u}) + \alpha\,\Omega(\mathbf{z})$$

Se alege stabilizatorul în acord cu teoria prezentată la capitolul 2.1.5, ca fiind pătratul normei euclidiene

$$\Omega(\mathbf{z}) = \| \mathbf{z} \|^2 \qquad (2.53)$$

Rezultă funcționala de legătură sub forma

$$M^{\alpha}(\mathbf{z},\mathbf{u}) = \| \mathbf{Az-u} \|^2 + \alpha \| \mathbf{z} \|^2 \qquad (2.54)$$

Relația (2.54) reflectă compromisul sau balansul între precizie (cerută de minimul primului termen din membrul drept) și realizabilitate (implicată de minimul celui de-al doilea termen).

Dacă la determinarea pseudosoluției normale se impune condiția de minim succesiv, prima dată primului termen din membrul drept, apoi celui de-al doilea, la metoda regularizării condiția de minim se pune simultan ambilor termeni.

Pentru aflarea soluției regularizate se notează elementele matricilor și vectorilor în modul uzual și relația (2.54) devine

Scanned with OKEN Scanner

$$M^{\alpha}(z,u) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j - u_i\right)^2 + \alpha \sum_{j=1}^{n} z_j^2 \qquad (2.55)$$

Condiția de minimizare a funcționalei se scrie sub forma

$$\frac{\partial M^{\alpha}(z,u)}{\partial z_k} = 0, \quad k=1,2\ldots n \qquad (2.56)$$

Derivând relația (2.55) în funcție de z_k rezultă

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ik}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j - u_i\right) + \alpha z_k = 0 \qquad (2.57)$$

O formă mai convenabilă a ecuației de mai sus este

$$\alpha z_k + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ik} a_{ij}\right) z_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} u_i \qquad (2.58)$$

Pentru k=1,2...n, rezultă un sistem de n ecuații cu n necunoscute.

O formă similară pentru relația (2.58) se poate scrie sub formă matricială. Se verifică ușor prin calcul direct similitudinea cu ecuația matricială

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \alpha \mathbf{I}_n)\,\mathbf{z} = \mathbf{A}^T\mathbf{u} \qquad (2.59)$$

Se rezolvă sistemul (2.58) sau (2.59) pentru diferite valori ale parametrului de regularizare α, calculându-se de fiecare dată eroarea

$$\varepsilon = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j - u_i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (2.60)$$

Soluția optimă se alege ținând seama nu numai de precizia exprimată de ε ci și de posibilitatea practică de realizare a soluției, care în general depinde de norma euclidiană a lui **z**.

BIBLIOGRAFIE la capitolul 2

2.1.Tihonov, A.N., Arsenin, V.I., *Méthodes de résolution de prblèmes mal posés,* Editions Mir, Moscou, 1976.

2.2.Pawluk, K., Rudnicki, M., *The state of art in the synthesis of electromagnetic fields,* ISEF'87, pp.305-312, Pavia, 1987.

2.3.Pawluk, K., Rudnicki, M. *Unified approach to the synthesis of electromagnetic fields,* Prace Instytutu Elektrotechniki, no. 147, pp. 67-79, 1987.

Scanned with OKEN Scanner

2.4.Rudnicki, M., *Synthesis of electromagnetic field using generalized discrepancy,* Prace Instytutu Elektrotechniki, no. 137, pp. 19-32, 1985
2.5.Rudnicki, M. *The choice of regularization parameter in reverse problems of electromagnetic field theory,* ISEF'85, pp.137-140, Warsaw, 1985.
2.6.Sikora, R., Gawrylczuk, K.M., Gramz, M., Gratkowski, S., Ziolkowski, M., *Mathematical background for the electromagnetic field synthesis,* Prace Instytutu Elektrotechniki, no. 132, pp. 21-34, 1984.
2.7.Sykulski, J.K., *Computational magnetics,* Chapman and Hall Science Publishers, 1995.
2.8.Hansen, P.C., *The truncated SVD as a method for regularization,* BIT, no. 27, pp.534-553, 1987.
2.9.Hansen, P.C., *Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve,* SIAM Review, no. 34, pp.561-580, 1992.
2.10.Neittaanmaki, P., Rudnicki, M., Savini, A., *Inverse problems and optimal design in electricity and magnetism,* Clarendon Press, Oxford University Inc., New York, 1996.
2.11.Miettinen, K., Makela, M.M., Neittaanmaki, P., Periaux, J., *Evolutionary algorithms in engineering and computer science,* John Wiley & Sons, LTD, Chichester, England, Weinheim, New-York, Singapore, Toronto, 1999.
2.12.Hanke, M., Hansen, P.C., *Regularization methods for large-scale problems,* project for Danish Natural Science Research Council and Deutche Forschungagemeinschaft, 1994.
2.13.Micu, D., *Synthèse d'un champ magnétique par la méthode de régularisation des équations intégrales Fredholm de première espece,* Revue roumaine des sciences techniques, série E.E., tome 37, pag. 283-293, Bucarest, 1992.
2.14.Crstici, B., *Matematici speciale,* E.D.P. Bucureşti, 1981.

Scanned with OKEN Scanner

3 PSEUDOSOLUȚII ALE SISTEMELOR DE ECUAȚII ALGEBRICE LINIARE DEGENERATE SAU RĂU CONDIȚIONATE

3.1 DEFINIREA PSEUDOSOLUȚIILOR

Se consideră sistemul de ecuații algebrice liniare

$$\mathbf{A}\,\mathbf{z} = \mathbf{u} \tag{3.1}$$

de m ecuații și n necunoscute.

Există două situații posibile:

a)Sistemul este compatibil, deci există o matrice coloană **z** care satisface condiția

$$\| \mathbf{A}\,\mathbf{z} - \mathbf{u} \| = 0 \tag{3.2}$$

adică matricea coloană a resturilor este nulă.

În această situație sunt posibile două cazuri:

1)sistemul să aibă soluție unică, dacă rangul matricei sistemului, r, îndeplinește condiția $r = n$

2)sistemul să aibă o infinitate de soluții dacă $r < n$ gradul de nedeterminare al sistemului fiind n-r (mulțimea soluțiilor formează o varietate liniară, un hiperplan, de dimensiune egală cu n-r).

b)Sistemul este incompatibil, ceea ce înseamnă că rangul $r < m$ și unul dintre determinanții caracteristici este nenul.

În această situație se definește pseudosoluția $\mathbf{z}_p$ ca fiind soluția (exactă sau aproximativă) care asigură o normă minimă a vectorului eroare, conform relației [3.1], [3.2]:

$$\| \mathbf{A}\,\mathbf{z}_p - \mathbf{u} \| \le \| \mathbf{A}\,\mathbf{z} - \mathbf{u} \| \qquad \forall \mathbf{z} \in R^n \tag{3.3}$$

Se disting două cazuri și în această situație de incompatibilitate:

1)pseudosoluția este unică dacă $r = n$

2)există o infinitate de pseudosoluții, dacă $r < n$, care formează o varietate liniară de dimensiune egală cu n-r .

Se observă că în cazul sistemului compatibil, toate soluțiile sistemului satisfac condiția (3.3), așadar orice soluție exactă a sistemului poate fi considerată ca un caz particular de pseudosoluție.

Scanned with OKEN Scanner

În multe probleme tehnice, inclusiv în probleme de sinteză de proiectare, se iveşte necesitatea de a afla pseudosoluţiile unui sistem degenerat de ecuaţii algebrice liniare [3.3].

Un sistem degenerat are valorile proprii ale matricei ce corespunde determinantului principal foarte apropiate de zero, sau unele chiar nule, pentru o anumită precizie cu care se lucrează. Aceasta face ca unele sisteme degenerate, să se transforme în sisteme nedegenerate dar rău condiţionate atunci când precizia de lucru creşte [3.4]. Astfel se afirmă că sistemele de ecuaţii degenerate şi cele rău condiţionate sunt indiscernabile uneori, deci teoria pseudosoluţiilor este evident aplicabilă şi sistemelor de ecuaţii rău condiţionate.

3.2 DETERMINAREA PSEUDOSOLUŢIILOR CU METODA DETERMINANŢILOR GRAMM

3.2.1 EXEMPLE SIMPLE DE AFLARE A PSEUDOSOLUŢIILOR

Pentru o mai clară expunere a problemei se vor trata înainte de cazul general două exemple corespunzând situaţiei b) cazul 2) şi apoi cazul 1)
Astfel, primul exemplu se va referi la determinarea pseudosoluţiilor în cazul unui sistem incompatibil cu rangul mai mic decât numărul de necunoscute, caz în care ne aşteptăm la o infinitate de pseudosoluţii.
Al doilea exemplu va trata sistemul incompatibil la care rangul este egal cu numărul necunoscutelor, caz în care ne aşteptăm la o pseudosoluţie unică.

EXEMPLUL 1

Se consideră sistemul de ecuaţii liniar $\mathbf{A}\,\mathbf{z} = \mathbf{u}$ de forma:

$$z_1 + 2z_2 + 3z_3 = 7 \qquad (3.4)$$
$$z_1 + 3z_2 + 4z_3 = 8 \qquad (3.5)$$
$$2z_1 + 5z_2 + 7z_3 = 6 \qquad (3.6)$$

Se observă că determinantul matricei sistemului este nul

$$\det \mathbf{A} = 0 \qquad (3.7)$$

Rangul matricei **A** este r = 2, ecuaţii principale se iau (3.4) şi (3.5) iar necunoscute principale z_1 şi z_2 , determinantul principal fiind astfel de valoare 1.

Scanned with OKEN Scanner

În aceste condiții determinantul caracteristic rezultă egal cu -9, deci nenul, astfel că sistemul (3.4)-(3.6) este incompatibil.
Se notează matricele coloană formate din coeficienții necunoscutelor z_1, z_2 și z_3

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}3\\4\\7\end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Se observă că $\mathbf{v}_3$ este combinație liniară a matricelor coloană $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$ (este chiar suma acestora). Cum $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$ sunt liniar independente rezultă că mulțimea valorilor pe care le ia $\mathbf{Az}$ este:

$$\text{Im } \mathbf{A} = \{\mathbf{Az} \,|\, \mathbf{z}\in R^3\} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 \quad a_1,a_2\in R \tag{3.9}$$

Folosind reprezentarea în spațiul cu 3 dimensiuni, Im **A** este planul definit de vectorii

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}\\ \mathbf{v}_2 &= 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}\end{aligned} \tag{3.10}$$

adică planul (P) de vector $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ care trece prin origine (Fig.1):

$$-x-y+z=0 \tag{3.11}$$

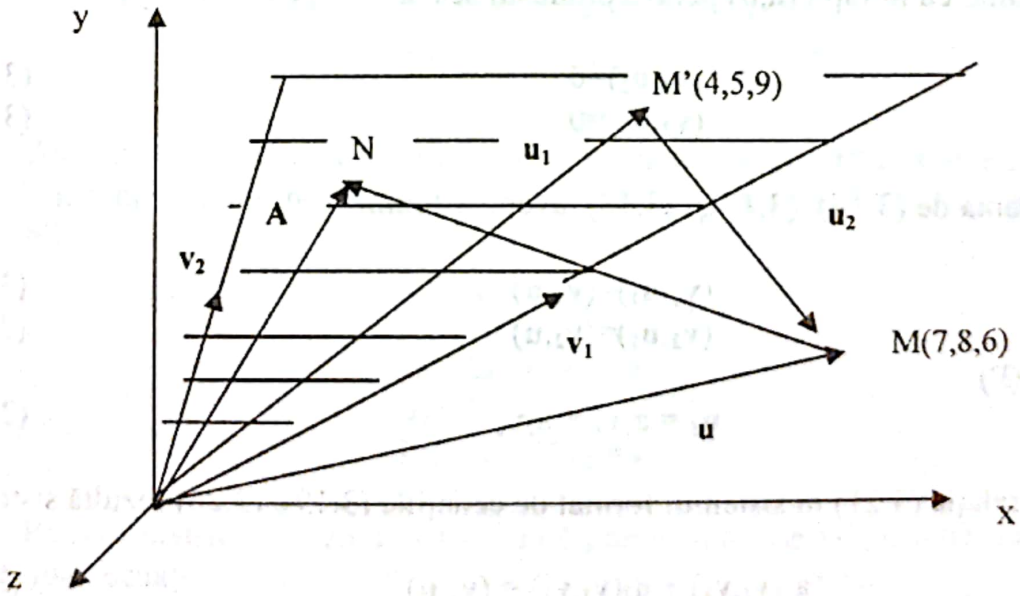


Fig.3.1 Interpretarea geometrică a pseudosoluțiilor sistemului

În această reprezentare matricea coloană **u** corespunde vectorului

$$\mathbf{u} = 7\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 6\mathbf{k} \tag{3.12}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu vârful în punctul M(7,8,6).
Evident că vârful M al vectorului **u** nu aparţine planului (P).
Considerând un vector coloană **z** oarecare, vectorului coloană **Az** îi va corespunde un punct N∈(P), iar norma resturilor va avea ca şi corespondent lungimea segmentului MN:

$$\| \mathbf{A}\,\mathbf{z} - \mathbf{u} \| = MN \tag{3.13}$$

Cea mai mică normă a resturilor se obţine în cazul în care vectorului coloană **Az** îi corespunde punctul M', proiecţia punctului M pe planul (P).

În acest caz **z** este chiar pseudosoluţia $\mathbf{z}_p$:

$$\| \mathbf{A}\,\mathbf{z} - \mathbf{u} \| = MM' \quad , MM' \perp (P) \tag{3.14}$$

Se notează $\mathbf{A}\,\mathbf{z}_p = \mathbf{u}_1$ unde vectorului $\mathbf{u}_1$ îi corespunde punctul M'.

Vectorul M'M se notează cu $\mathbf{u}_2$:

$$\mathbf{u}_2 \perp (P) \tag{3.15}$$

Cu aceste notaţii de vectori în R^3 avem :

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 \tag{3.16}$$

Se pune problema acum de a afla vectorii $\mathbf{u}_1$ şi $\mathbf{u}_2$.

Se ţine seama că $\mathbf{u}_2$ este perpendicular pe planul (P), deci şi pe vectorii $\mathbf{v}_1$ şi $\mathbf{v}_2$ .Rezultă, cu notaţia (a,b) pentru produsul scalar:

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2) = 0 \tag{3.17}$$
$$(\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_2) = 0 \tag{3.18}$$

Ţinând seama de (3.16), (3.17)şi (3.18), avem sistemul:

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{u}) \tag{3.19}$$
$$(\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1) = (\mathbf{v}_2, \mathbf{u}) \tag{3.20}$$

Cum $\mathbf{u}_1 \in (P)$

$$\mathbf{u}_1 = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 \tag{3.21}$$

Folosind relaţia (3.21) în sistemul format de ecuaţiile (3.19), (3.20) rezultă sistemul

$$\begin{aligned} a_1(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1) + a_2(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) &= (\mathbf{v}_1,\mathbf{u}) \\ a_1(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) + a_2(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_2) &= (\mathbf{v}_2,\mathbf{u}) \end{aligned} \tag{3.22}$$

Determinantul principal al sistemului (3.22) este determinantul Gramm al vectorilor liniar independenţi $\mathbf{v}_1$ şi $\mathbf{v}_2$ adică $G[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2]$

Scanned with OKEN Scanner

$$G(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)=\begin{vmatrix}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)\\ (\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_2)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & 15\\ 15 & 38\end{vmatrix} \tag{3.23}$$

Rezultă soluțiile sistemului (3.22) $a_1 = 2$ și $a_2 = 1$
Folosind relația (3.21) se poate acum calcula

$$\mathbf{u}_1 = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 9\mathbf{k} \tag{3.24}$$

Cu relația (3.16) rezultă

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k} \tag{3.25}$$

Distanța de la punctul M la planul (P) este

$$\|u_2\| = [\,3^2 + 3^2 + (-3)^2\,]^{1/2} = 3\sqrt{3} \tag{3.26}$$

Se verifică geometric cu formula distanței unui punct la un plan :

$$MN = |-7-8+6\,|\,[\,(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2\,]^{-1/2} = 3\sqrt{3} \tag{3.27}$$

O formulă condensată pentru $\mathbf{u}_2$ se poate scrie pe baza relațiilor(3.16),(3.22) și (3.23)

$$\mathbf{u}_2 = [G(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)]^{-1}\begin{vmatrix}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) & (\mathbf{v}_1,\mathbf{u})\\ (\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_2) & (\mathbf{v}_2,\mathbf{u})\\ (\mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_2) & (\mathbf{u})\end{vmatrix} \tag{3.28}$$

Așadar sistemul incompatibil (4)-(6) având rangul r=2 mai mic decât numărul necunoscutelor n=3 are o infinitate de pseudosoluții date de sistemul compatibil

$$\mathbf{A}\,\mathbf{z}_p = \mathbf{u}_1 \tag{3.29}$$

adică

$$\begin{aligned} z_1 + 2z_2 + 3z_3 &= 4\\ z_1 + 3z_2 + 4z_3 &= 5\\ 2z_1 + 5z_2 + 7z_3 &= 9 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Rangul matricei sistemului fiind r=2 pseudosoluțiile vor fi date numai de primele două ecuații:

$$\begin{aligned} z_1 + 2z_2 &= 4 - 3\lambda\\ z_1 + 3z_2 &= 5 - 4\lambda\\ z_3 &= \lambda \end{aligned} \tag{3.31}$$

Mulțimea pseudosoluțiilor este

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{aligned} z_1 &= 2-\lambda \\ z_2 &= 1-\lambda \\ z_3 &= \lambda \end{aligned} \qquad (3.32)$$

Evident că

$$\| \mathbf{A}\, z_p - \mathbf{u} \| = \| \mathbf{u}_1 - \mathbf{u} \| = \| \mathbf{u}_2 \| = 3\sqrt{3} \qquad (3.33)$$

EXEMPLUL 2

După cum s-a arătat la capitolul introductiv, situația b) cazul 1), dacă sistemul incompatibil îndeplineşte condiția r = n, adică rangul egal cu numărul necunoscutelor, atunci sistemul are pseudosoluție unică.
Se va exemplifica acest caz pe sistemul următor:

$$\begin{aligned} z_1 + 2z_2 &= 7 \\ z_1 + 3z_2 &= 8 \\ 2z_1 + 5z_2 &= 6 \end{aligned} \qquad (3.34)$$

Se observă că sistemul (3.34) provine din sistemul (3.4)-(3.6) care s-a modificat în sensul că nu s-a mai luat în considerare necunoscuta z_3 .

Determinantul principal al sistemului (3.34), determinantul caracteristic şi mulțimea lm **A** sunt identice cu cele ale sistemului (3.4)-(3.6) iar $\mathbf{u}_1$ şi $\mathbf{u}_2$ sunt date de relațiile (3.24) şi (3.25). Aşadar pseudosoluțiile sunt date de sistemul compatibil $\mathbf{A}\, z_p = \mathbf{u}_1$ adică

$$\begin{aligned} z_1 + 2z_2 &= 4 \\ z_1 + 3z_2 &= 5 \\ 2z_1 + 5z_2 &= 9 \end{aligned} \qquad (3.35)$$

Cum r = n = 2 sistemul (3.35) este compatibil determinat deci soluția lui, care este pseudosoluție a sistemului (3.34), este unică:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \\ z_2 &= 1 \end{aligned} \qquad (3.36)$$

şi în acest caz

$$\| \mathbf{A}\, z_p - \mathbf{u} \| = \| \mathbf{u}_1 - \mathbf{u} \| = \| \mathbf{u}_2 \| = 3\sqrt{3} \qquad (3.37)$$

CAZUL GENERAL

Scanned with OKEN Scanner

Presupunem că avem un sistem (3.1) având rangul r mai mic decât numărul de ecuații m și unul dintre determinanții caracteristici nenul. Sistemul este deci incompatibil. Se pune problema aflării pseudosoluțiilor

Im A este subspațiul generat de coloanele matricei A. Dintre cei n vectori coloană, r sunt liniar independenți și generează subspațiul Im A :

$$\text{Im } \mathbf{A} = \{ \mathbf{Az} \mid \mathbf{z} \in R^n \} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_r\mathbf{v}_r \qquad a_i \in R, \tag{3.38}$$

Sistemul fiind incompatibil **u** nu aparține mulțimii Im A

Se asociază matricilor coloană vectori în planul cu m dimensiuni după relația

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^T (\mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \ldots \mathbf{e}_m)^T \qquad i = 1,2,\ldots r \tag{3.39}$$

Im A va fi hiperplanul (P) definit de vectorii $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots\mathbf{v}_r$ iar $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots\mathbf{e}_m$ sunt versori ortogonali care formează o bază în R^m.

Se notează cu $\mathbf{u}_1$ proiecția vectorului **u** pe hiperplanul (P) și cu $\mathbf{u}_2$ vectorul perpendicular pe (P) astfel

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 \tag{3.40}$$

$$\mathbf{u}_2 \perp (P) \tag{3.41}$$

$$\mathbf{u}_1 \in (P) \tag{3.42}$$

Din (3.42) rezultă

$$\mathbf{u}_1 = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_r\mathbf{v}_r \tag{3.43}$$

iar din (3.41) avem, ținând seama că produsul scalar a doi vectori ortogonali este nul:

$$(\mathbf{v}_i,\mathbf{u}_2)=0 \qquad i=1,2,\ldots r \tag{3.44}$$

Substituind în (3.44) expresia lui $\mathbf{u}_2$ dată de (3.40) avem:

$$(\mathbf{v}_i,\mathbf{u}_1) = (\mathbf{v}_i,\mathbf{u}) \qquad i=1,2,\ldots r \tag{3.45}$$

Înlocuind în (3.45) expresia lui $\mathbf{u}_1$ dată de (3.43) rezultă sistemul de r ecuații cu r necunoscute $(a_1,a_2,\ldots a_r)$.

$$a_1(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_1)+a_2(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_2)+\ldots+a_r(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_r)=(\mathbf{v}_i,\mathbf{u}) \qquad i=1,2,\ldots r \tag{3.46}$$

al cărui determinant Gramm $G(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots\mathbf{v}_r)$ este strict pozitiv [3.3].

Ținând seama de (3.40),(3.43) și (3.46) se obține forma condensată pentru $\mathbf{u}_2$:

Scanned with OKEN Scanner

$$u_2 = [G(v_1,v_2,\ldots v_r)]^{-1} \begin{vmatrix} (v_1,v_1)\ldots & (v_1,v_r) & (v_1,u) \\ (v_r,v_1)\ldots & (v_r,v_r) & (v_r,u) \\ (v_1)\ldots & (v_r) & (u) \end{vmatrix} \quad (3.47)$$

Dezvoltarea determinantului se face după ultima linie.

Rezultă apoi $u_1=u-u_2$

Pseudosoluțiile vor fi obținute din sistemul compatibil

$$A\, z_p = u_1 \quad (3.48)$$

Într-adevăr soluțiile z_p au proprietatea (3):

$$\| A z_p - u \| = \| u_1 - u \| = \| u_2 \| \leq \| A z - u \| \quad (3.49)$$

pentru că $\| u_2 \|$ este cea mai mică distanță de la vârful vectorului u la hiperplanul (P)[3.3].

Practic din sistemul (3.48) se reține primele r ecuații (ecuațiile principale) și se rezolvă sistemul cu grad de nedeterminare n-r .

Dacă n = r sistemul (3.48) este compatibil determinat și pseudosoluția sistemului este unică.

3.3 DETERMINAREA PSEUDOSOLUȚIILOR CU METODA MINIMIZĂRII NORMEI ERORILOR

Pseudosoluția sistemului (3.1) fiind definită cu relația (3.3) problema determinării pseudosoluției revine la a găsi funcția E(z) care este chiar norma euclidiană a erorilor și apoi soluția care minimizează această funcție [3.4].

$$E(z) = \left[\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j - u_i \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.50)$$

Minimul funcției E(z) se realizează în aceleași condiții ca și minimul pătratului acestei funcții $E^2(z)$.

Condiția de minimizare este

$$\frac{\partial E^2(z)}{\partial z_k} = 0 \quad (3.51)$$

unde k=1,2,...n

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă sistemul de n ecuații cu n necunoscute

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ik} a_{ij}\right) z_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} u_i \qquad (3.52)$$

care se obține din (3.52) pentru k=1,2,...n .

Sistemul (3.52) este evident identic cu :

$$\mathbf{A^T A\, z = A^T u} \qquad (3.53)$$

Vom arăta în continuare că sistemele (3.48) şi (3.53) duc la aceleaşi soluții deci metodele prezentate la cap. 3.2. şi la cap. 3.3. sunt echivalente.

Observând că orice vector $\mathbf{v_i}$ cu i > r poate fi scris ca o combinație liniară a vectorilor $\mathbf{v_1, v_2, ... v_r}$ rezultă

$$(\mathbf{v_i, u_2})=0 \qquad i=1,2,...n \qquad (3.54)$$

de unde

$$(\mathbf{v_i, u_1})=(\mathbf{v_i, u}) \qquad i=1,2,...n \qquad (3.55)$$

Se observă că $\mathbf{A^T}$ are pe fiecare linie i componentele corespunzătoare vectorului $\mathbf{v_i}$ aşadar

$$\mathbf{A^T u_1 = A^T u} \qquad (3.56)$$

Dacă în (50) se multiplică la stânga cu $\mathbf{A^T}$ rezultă

$$\mathbf{A^T A\, z_p = A^T u_1} \qquad (3.57)$$

şi ținând seama de (3.56) avem

$$\mathbf{A^T A\, z_p = A^T u} \qquad (3.58)$$

deci (3.48) s-a adus la forma echivalentă (3.58) care este identică cu (3.53).

Să observăm că (3.48) este un sistem de m ecuații cu n necunoscute iar (3.53) un sistem de n ecuații cu n necunoscute.

Ele pot avea aceleaşi soluții pentru că în (3.48) şi în (3.53) se reţin pentru rezolvare r ecuații principale, unde $r \leq \min(m,n)$.

Să exemplificăm cele de mai sus:

Sistemul de ecuații (3.4)-(3.6) considerat la cap. 3.2., sistem incompatibil, duce cu metoda determinanților Gramm la sistemul compatibil nedeterminat (3.30) ale cărui ecuații principale sunt

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{aligned} z_1 + 2z_2 + 3z_3 &= 4 \\ z_1 + 3z_2 + 4z_3 &= 5 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Acelaşi sistem (3.4)-(3.6) cu metoda minimizării normei duce la sistemul

$$\begin{aligned} 6z_1 + 15z_2 + 21z_3 &= 27 \\ 15z_1 + 38z_2 + 53z_3 &= 68 \\ 21z_1 + 53z_2 + 74z_3 &= 95 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Se renunţă la ultima ecuaţie, care este suma primelor două astfel că sistemul (3.60) devine

$$\begin{aligned} 6z_1 + 15z_2 + 21z_3 &= 27 \\ 15z_1 + 38z_2 + 53z_3 &= 68 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Înmulţind prima ecuaţie cu (-7/3) şi adunând-o la a doua ecuaţie se află chiar a doua ecuaţie a sistemului (3.59), iar scăzând ecuaţia găsită din prima ecuaţie se află prima ecuaţie a sistemului (3.59). Cele două sisteme, (3.59) şi (3.61), sunt echivalente, aşadar, după cum era de aşteptat, prin cele două metode se ajunge la aceleaşi soluţii.

BIBLIOGRAFIE la capitolul 3

3.1.Micu, D.,*Contributions à la synthèse du champ électromagnétique par la méthode de régularisation des systèmes dégénérés*, Revue roumaine des sciences techniques, série É.É., tome 38, vol. 2, pag. 169-179, Bucarest, 1993.

3.2.Tihonov, A.N., Arsenin, V.I., *Méthodes de résolution de problème mal posés*,Edition Mir, Moscou, 1974.

3.3.Micu, D., Pop, V., *Metode de optimizare prin sinteza câmpului magnetic*, Contract nr. 3003/1994, Beneficiar M.I., 1994.

3.4.Bucur, C.M.,Popeea, C.A.,Simion, Gh.Gh., *Matematici speciale. Calcul numeric*, E.D.P. Bucureşti, 1983.

3.5.Micu, Adriana, Micu, D., Patachi, N., *Le nombre de condition*, Revue roumaine des sciences techniques, série É.É., tome 44, vol. 2, pag. 121-134, Bucarest, 1999.

Scanned with OKEN Scanner

4 PSEUDOSOLUȚII NORMALE ALE SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE DEGENERATE SAU RĂU CONDIȚIONATE

4.1.DEFINIREA PSEUDOSOLUȚIILOR NORMALE

Pentru pseudosoluțiile unui sistem incompatibil şi pentru soluțiile unui sistem compatibil (care soluții se încadrează de fapt în definiția dată pseudosoluțiilor şi se pot numi deci şi pseudosoluții) se defineşte pseudosoluția normală $\mathbf{z_p}^0$ prin relația [4.1]:

$$\begin{aligned} &\left\|\mathbf{Az_p}-\mathbf{u}\right\| \le \left\|\mathbf{Az}-\mathbf{u}\right\|, \quad \forall \mathbf{z}\in R^n \\ &\left\|\mathbf{z_p}^0-\mathbf{z_1}\right\| \le \left\|\mathbf{z_p}-\mathbf{z_1}\right\|, \quad \forall \mathbf{z_p}^0\in \mathbf{z_p} \end{aligned} \tag{4.1}$$

$\mathbf{z_p}$ fiind pseudosoluția (soluția) care asigură minimul (nulul) normei erorii.

În general se ia $\mathbf{z_1}=\mathbf{0}$, astfel încât condiția de pseudosoluție normală se scrie:

$$\begin{aligned} &\left\|\mathbf{Az_p}-\mathbf{u}\right\| \le \left\|\mathbf{Az}-\mathbf{u}\right\|, \quad \forall \mathbf{z}\in R^n \\ &\left\|\mathbf{z_p}^0\right\| \le \left\|\mathbf{z_p}\right\|, \quad \forall\, \mathbf{z_p}^0\in \mathbf{z_p} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Se pot face următoarele observații

a)Dacă sistemul este compatibil determinat atunci soluția este unică, deci este automat şi pseudosoluție (norma erorii nulă) şi soluție normală.

b)Dacă sistemul este compatibil nedeterminat atunci soluțiile sunt automat şi pseudosoluții (norma erorii nulă) şi rămâne de văzut cum se determină soluția normală.

c)Dacă sistemul este incompatibil, se determină sistemul compatibil asociat care dă pseudosoluțiile pentru sistemul dat. Pentru aceasta se foloseşte una din metodele prezentate la capitolele 3.2 şi 3.3 care duce la sistemul:

$$\mathbf{Az}=\mathbf{u_1} \tag{4.3}$$

respectiv la sistemul

$$\mathbf{A^TAz}=\mathbf{A^Tu} \tag{4.4}$$

Cazul a) duce la soluția normală prin rezolvarea directă a sistemului compatibil, iar cazurile b) şi c) sunt identice întrucât pun problema de a găsi soluția normală dintr-o infinitate de soluții ale unui sistem compatibil nedeterminat (cazul b), sau ale unui sistem care a fost transformat într-un sistem compatibil nedeterminat (cazul c).

Scanned with OKEN Scanner

4.2.DETERMINAREA PSEUDOSOLUȚIILOR NORMALE CU METODA DETERMINANȚILOR GRAMM

Pentru o mai clară înțelegere a problemei se vor prezenta câteva cazuri particulare de calcul a pseudosoluției normale, cu toate etapele pe care acest calcul le presupune [4.2], [4.3].

4.2.1 PSEUDOSOLUȚIA NORMALĂ PENTRU UN SISTEM CU m=1, n=2

Se cere să se determine soluția normală pentru sistemul compatibil nedeterminat format dintr-o ecuație cu 2 necunoscute

$$z_1+2z_2=1 \tag{4.5}$$

Mulțimea soluțiilor S_0 ale sistemului omogen

$$z_1+2z_2=0 \tag{4.6}$$

reprezintă în sistemul de axe $z_1 0 z_2$ o dreaptă (d_0) ce trece prin origine.

Se alege o bază de versor $\mathbf{e}_1$ în mulțimea S_0. Versorul $\mathbf{e}_1$ se determină alegând un punct din S_0, de exemplu (2, -1)

$$\mathbf{e}_1 = (2\mathbf{i}-\mathbf{j})\left[2^2+(-1)^2\right]^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i}-\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j} \tag{3.7}$$

Coordonatele punctului care reprezintă vârful vectorului $a\mathbf{e}_1$, $a\in R$ sunt soluțiile sistemului omogen.

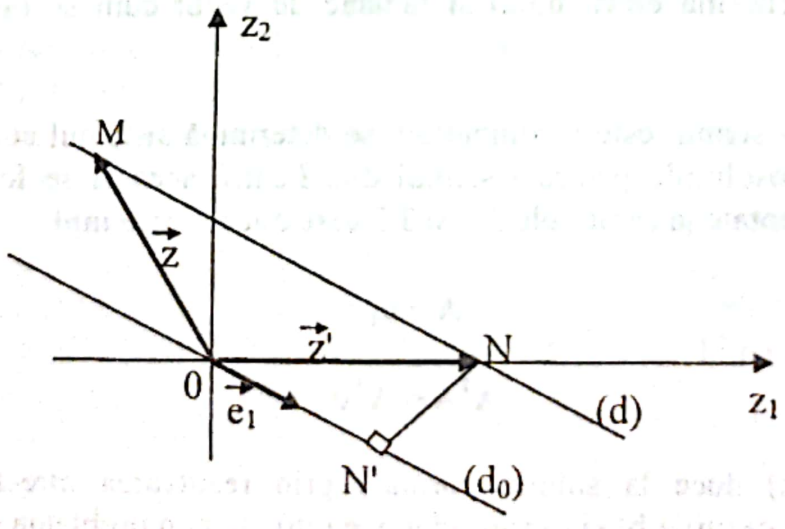


Fig.4.1 Interpretarea geometrică a psedosoluției normale, sistem cu m=1,n=2

Scanned with OKEN Scanner

Se consideră o soluție particulară a sistemului dat, neomogen, $z_1'=1$, $z_2'=0$ la care corespunde vectorul $\mathbf{z'=i=ON}$.

Soluția generală S se poate scrie ca diferența (suma) dintre soluția particulară și soluția sistemului omogen

$$\mathbf{z=z'-ae_1} \tag{4.8}$$

Vârful vectorului **z** considerat cu originea în 0 descrie o dreaptă (d) paralelă cu dreapta (d_0). Dreapta (d) dusă prin N corespunde mulțimii S. Coordonatele vârfului M al vectorului **z** sunt soluțiile sistemului iar norma soluției:

$$\|\mathbf{z}\| = |\mathbf{z}| = \mathrm{OM} \tag{4.9}$$

Norma minimă, deci soluția normală se obține punând condiția ca $\mathbf{OM} \perp (d)$ sau $\mathbf{NN'} \perp (d_0)$.

Folosind (4.8) avem condițiile:

$$\mathbf{z^0=z'-ae_1} \tag{4.10}$$

$$(\mathbf{e_1,z^0})=0 \tag{4.11}$$

din (4.10) și (4.11) rezultă:

$$\mathbf{a(e_1,e_1)=(e_1,z')} \tag{4.12}$$

Deci

$$\mathbf{z^0 = z' - \frac{(e_1,z')}{(e_1,e_1)} e_1 = \frac{1}{G[e_1]} \begin{vmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,z') \\ e_1 & z' \end{vmatrix}} \tag{4.13}$$

Numeric

$$\mathbf{z^0=1/5i+2/5j} \tag{4.14}$$

Soluția normală corespunde deci la $z_1=1/5$, $z_2=2/5$ iar norma minimă (norma soluției normale) este:

$$\|\mathbf{z^0}\| = \frac{1}{\sqrt{5}} \tag{4.15}$$

Observație: Exemplul fiind simplu soluția se poate verifica ușor. Soluția sistemului se scrie direct $z_1=1-2\lambda$, $z_2=\lambda$. Norma soluției este:

$$\|\mathbf{z}\|^2 = (1-2\lambda)^2 + \lambda^2 \tag{4.16}$$

Condiția de minim este:

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{\partial \|\mathbf{z}\|^2}{\partial \lambda} = -4(1-2\lambda)+2\lambda = 0$$

de unde $\lambda=2/5$ şi deci $z_1=1/5$; $z_2=2/5$ reprezintă pseudosoluţia (soluţia) de normă minimă, adică pseudosoluţia normală găsită anterior.

În cazul în care se caută soluţia normală în sensul definiţiei mai generale (1) cu $\mathbf{z}_i=2\mathbf{i}+\mathbf{j}$ problema se pune astfel: se cere cea mai apropiată soluţie normală a ecuaţiei $z_1+2z_2=1$ faţă de perechea (2,1).

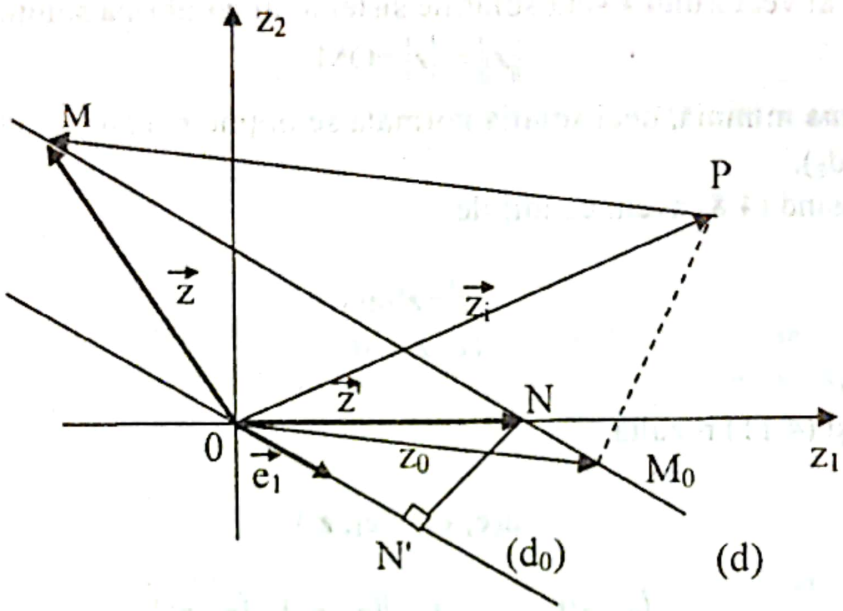


Fig.4.2 Pseudosoluţia normală a unui sistem cu m=1, n=2 raportată la vectorul $\mathbf{v}_1=2\mathbf{i}+\mathbf{j}$

Soluţia generală S este dată de relaţia (3.8)

Norma diferenţei $\|\mathbf{z}-\mathbf{z}_i\|$ corespunde lungimii segmentului PM (Fig.4.2). Minimul acestei norme înseamnă minimul lungimii segmentului PM şi se obţine punând condiţia ca $\mathbf{PM}\perp(d)$, caz în care soluţia devine soluţie normală. Aceasta se întâmplă când M este în poziţia M_0 ($\mathbf{PM_0}\perp d$), deci pseudosoluţiei normale $\mathbf{z}^0$ îi corespunde vectorul $\mathbf{OM_0}$.

Rezultă aşadar

$$\mathbf{z}^0-\mathbf{z}_i=\mathbf{z}'-a\mathbf{e}_1-\mathbf{z}_i \qquad (4.17)$$

$$(\mathbf{e}_1,\mathbf{z}^0-\mathbf{z}_i)=0 \qquad (4.18)$$

Din (4.17) şi (4.18) avem:

$$a(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)=(\mathbf{e}_1,\mathbf{z}'-\mathbf{z}_i) \qquad (3.19)$$

deci

Scanned with OKEN Scanner

$$\mathbf{z}^0 = \mathbf{z}' - \frac{(\mathbf{e}_1, \mathbf{z}' - \mathbf{z}_i)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1 = \frac{1}{G[\mathbf{e}_1]}\begin{vmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{z}' - \mathbf{z}_i) \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{z}' \end{vmatrix} \tag{4.20}$$

Pentru exemplul considerat, cu $\mathbf{z}_i = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ se obține

$$\mathbf{z}_0 = \frac{7}{5}\bar{\mathbf{i}} - \frac{1}{5}\bar{\mathbf{j}} \tag{4.21}$$

Aşadar norma minimă rezultă

$$\|\mathbf{z}_0 - \mathbf{z}_i\| = \frac{3}{\sqrt{5}} \tag{4.22}$$

Se verifică direct distanța de la punctul P(2,1) la dreapta $z_1+2z_2-1=0$

$$\frac{|2+2-1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \tag{4.23}$$

Observație: considerând toate pseudosoluțiile sistemului (4.5) $z_1=1-2\lambda$, $z_2=\lambda$, soluția normală cea mai apropiată față de punctul (2, 1) se poate determina direct

$$\frac{\partial \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_i\|^2}{\partial \lambda} = 0$$

de unde

$$-4(-1-2\lambda)+2(\lambda-1)=0 \tag{4.24}$$

Se obține

$$\lambda = -\frac{1}{5}, \qquad z_1 = \frac{7}{5}, \quad z_2 = -\frac{1}{5} \tag{4.25}$$

ceea ce confirmă rezultatele găsite anterior.

4.2.2. PSEUDOSOLUȚIA NORMALĂ PENTRU UN SISTEM CU m=1, n=3

Se cere soluția normală pentru sistemul compatibil nedeterminat format dintr-o ecuație cu trei necunoscute:

$$z_1+2z_2+4z_3=1 \tag{4.26}$$

Mulțimea soluțiilor S_0 a sistemului omogen

$$z_1+2z_2+4z_3=0 \tag{4.27}$$

Scanned with OKEN Scanner

reprezintă un plan (P) în sistemul de axe $0z_1z_2z_3$ (Fig.4.3).

Se alege o bază oarecare în S_0. Se fixează punctul $A_1(2, -1, 0) \in (P)$ şi punctul $B_1(-4, 0, 1) \in (P)$ şi rezultă

$$\mathbf{e}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}; \quad \mathbf{e}_2 = -\frac{4}{\sqrt{17}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{17}}\mathbf{k}; \tag{4.28}$$

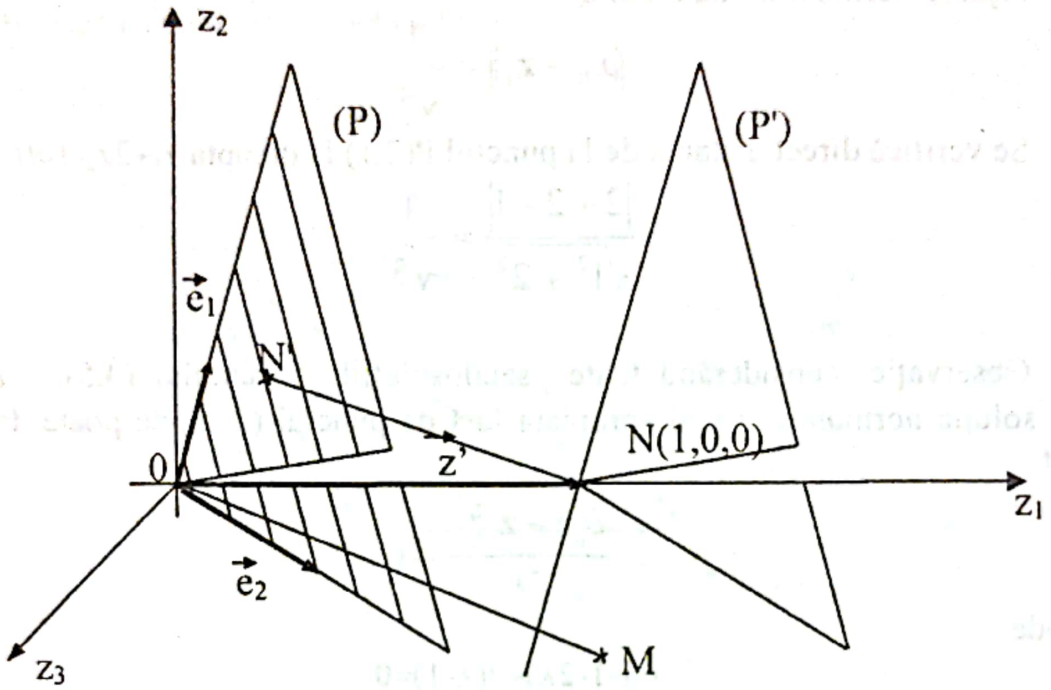


Fig.4.3 Interpretarea geometrică a pseudosoluţiei normale, sistem cu m=1, n=3

Se alege o soluţie particulară a sistemului (4.26) $z_1'=1$, $z_2'=0$, $z_3'=0$ la care corespunde $\mathbf{z'=i=ON}$

Orice soluţie a sistemului (4.26) se exprimă ca suma dintre o soluţie a ecuaţiei omogene (4.27) şi o soluţie particulară a sistemului (4.26).

Locul geometric al soluţiilor S ale sistemului este planul (P') paralel cu (P) care trece prin N.

O soluţie a sistemului se exprimă prin vectorul:

$$\mathbf{z=z'-(a_1e_1+a_2e_2)} \tag{4.29}$$

Pentru ca **z** să fie soluţia normală $\mathbf{z}^0$ distanţa de la O la extremitatea M a lui **z** trebuie să fie minimă sau M să fie proiecţia lui O pe planul (P'), sau

$$\mathbf{z=z^0=N'N} \tag{4.30}$$

unde N' este proiecţia lui N pe planul (P).

Rezultă:

$$\mathbf{z^0=z'-(a_1e_1+a_2e_2)} \tag{4.31}$$

Se scrie că $\mathbf{z}^0$ este normal pe $\mathbf{e}_1$ şi $\mathbf{e}_2$:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{z}^0)=0; \qquad (\mathbf{e}_2, \mathbf{z}^0)=0 \tag{4.32}$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă din (4.31) şi (4.32):

$$a_1(e_1, e_1)+a_2(e_1, e_2)=(e_1, z')$$
$$a_1(e_2, e_1)+a_2(e_2, e_2)=(e_2, z') \qquad (4.33)$$

Soluţia normală se exprimă condensat prin determinantul Gramm care se dezvoltă după ultima linie:

$$z^0 = \frac{1}{G[e_1,e_2]}\begin{vmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) & (e_1,z') \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) & (e_2,z') \\ e_1 & e_2 & z' \end{vmatrix} \qquad (4.34)$$

După calcule simple rezultă:

$$z^0=1/21\ \mathbf{i} + 2/21\ \mathbf{j} + 4/21\ \mathbf{k} \qquad (4.35)$$

Deci soluţia normală este:

$$z_1=1/21,\ z_2=2/21,\ z_3=4/21 \qquad (4.36)$$

Norma soluţiei normale este:

$$\|z^0\| = 1/\sqrt{21} \qquad (4.37)$$

Observaţie: geometric, se vede că distanţa OM este chiar norma pseudosoluţiei normale şi este egală cu distanţa de la punctul N(1,0,0) la planul $z_1+2z_2+4z_3=0$:

$$NN' = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+4^2}} = \frac{1}{\sqrt{21}} \qquad (4.38)$$

Norma soluţiei normale este egală cu distanţa NN'.

Soluţia normală se poate obţine şi direct, considerând pseudosoluţia:

$$z_1=1-2\lambda-4\mu;\ z_2=\lambda;\ z_3=\mu \qquad (4.39)$$

Exprimând norma soluţiei

$$\|z\|^2=(1-2\lambda-4\mu)^2+\lambda^2+\mu^2 \qquad (4.40)$$

şi anulând derivatele în funcţie de λ şi apoi în funcţie de μ, rezultă: $\lambda=2/21$, şi $\mu=4/21$, de unde cu(4.39) se obţine soluţia (4.36).

În cazul în care se caută soluţia normală în sensul definiţiei mai generale (4.1) cu $\mathbf{z}_i=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ problema (4.26) se reformulează astfel:

Se cere soluţia ecuaţiei

$$z_1+2z_2+4z_3=1$$

care este cea mai apropiată de tripletul (1,2,3).

Se repetă raţionamentul anterior până la exprimarea soluţiei (4.29). Se observă apoi că pentru ca $\mathbf{z}$ să fie soluţie normală raportată la vectorul $\mathbf{z}_i$ norma

Scanned with OKEN Scanner

$\|\mathbf{z}-\mathbf{z}_i\|$ trebuie să fie minimă, deci M să fie piciorul perpendicularei din punctul Q(1,2,3) pe planul P', aşadar QM să fie perpendicular pe planul P'. Nu s-a mai făcut reprezentarea pe Fig.4.3 a punctului Q, pentru a nu încărca inutil desenul.

Condiţiile vor fi

$$\mathbf{z}^0=\mathbf{z}'-(a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2) \tag{4.41}$$

$$(\mathbf{e}_1,\mathbf{z}^0-\mathbf{z}_i)=0 \tag{4.42}$$

$$(\mathbf{e}_2,\mathbf{z}^0-\mathbf{z}_i)=0 \tag{4.43}$$

Rezultă pseudosoluţia normală

$$\mathbf{z}^0=\frac{1}{G[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2]}\begin{vmatrix}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_1,\mathbf{z}'-\mathbf{z}_i)\\ (\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_2,\mathbf{z}'-\mathbf{z}_i)\\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{z}'\end{vmatrix} \tag{4.44}$$

După calcule avem

$$\mathbf{z}^0=\frac{5}{21}\mathbf{i}+\frac{10}{21}\mathbf{j}-\frac{1}{21}\mathbf{k}$$

deci pseudosoluţia normală este

$$z_1=\frac{5}{21},\quad z_2=\frac{10}{21},\quad z_3=-\frac{1}{21} \tag{4.45}$$

Rezultatul se poate verifica direct, ţinând seama de pseudosoluţia (4.39) a sistemului (4.26) şi exprimând norma diferenţei faţă de vectorul $\mathbf{z}_i$ la care se face raportarea

$$\|\mathbf{z}-\mathbf{z}_i\|^2=(-2\lambda-4\mu)^2+(\lambda-2)^2+(\mu-3)^3 \tag{4.46}$$

Anulând derivatele expresiei de mai sus faţă de λ şi apoi faţă de μ se află $\lambda=\frac{10}{21}$, $\mu=-\frac{1}{21}$ de unde cu (4.39) rezultă soluţia (4.45).

În acest caz norma minimă rezultă:

$$\|\mathbf{z}^0-\mathbf{z}_i\|=\frac{16}{\sqrt{21}}$$

Şi acest rezultat se poate verifica direct calculând distanţa de la punctul Q(1,2,3) la planul P', $z_1+2z_2+4z_3-1=0$

$$QM=\frac{1+2\cdot 2+4\cdot 3-1}{\sqrt{1^2+2^2+4^2}}=\frac{16}{\sqrt{21}}$$

Scanned with OKEN Scanner

4.2.3. PSEUDOSOLUȚIA NORMALĂ PENTRU UN SISTEM CU m=3, n=3

Se consideră sistemul compatibil:

$$\begin{aligned} z_1 + 2z_2 + 3z_3 &= 4 \\ z_1 + 3z_2 + 4z_3 &= 5 \\ 2z_1 + 5z_2 + 7z_3 &= 9 \end{aligned} \tag{4.47}$$

care dă pseudosoluțiile sistemului incompatibil (3.4)-(3.6) de la capitolul 3.2.

Se cere pseudosoluția normală a sistemului (4.47) care va fi pseudosoluție normală și pentru sistemul (3.4)-(3.6).

Se observă că a treia ecuație este suma primelor două ecuații.

Mulțimea S_0 a soluțiilor sistemului omogen este dreapta (d) dată de intersecția planelor:

$$\begin{aligned} z_1 + 2z_2 + 3z_3 &= 0 \\ z_1 + 3z_2 + 4z_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.48}$$

sau sub forma: $z_1=z_2=-z_3$

O soluție particulară a sistemului dat este:

$z_1'=2$, $z_2'=1$, $z_3'=0$, la care corespunde vectorul: $\mathbf{z'=2i+j=ON}$, (Fig.4.4)

Se alege o bază în subspațiul S_0 reprezentat de dreapta (d). Se ia un punct pe (d), fie $A_1(1,1,-1)$ și rezultă versorul:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k} \tag{4.49}$$

Soluția sistemului omogen este dată de coordonatele vârfului vectorului $a\mathbf{e}_1$, soluția particulară a sistemului dat este dată de vectorul $\mathbf{z'}$, soluția generală a sistemului este:

$$\mathbf{z=z'-ae}_1, \quad a \in R \tag{4.50}$$

Locul geometric al vârfului vectorului $\mathbf{z=OM}$ la variația lui a este locul geometric al soluțiilor sistemului și anume o dreaptă (d') dusă prin N paralelă cu (d).

Norma minimă pentru $\mathbf{z=z}^0$ se obține atunci când M este proiecția lui O pe dreapta (d') sau când N' este proiecția lui N pe (d). Deci pseudosoluția normală este

$$\mathbf{z}^0 = \mathbf{z'} - a\mathbf{e}_1 \tag{4.51}$$

cu condiția de ortogonalitate a lui $\mathbf{z}^0$ și $\mathbf{e}_1$

Scanned with OKEN Scanner

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{z}^0)=0 \tag{4.52}$$

sau

$$a(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)= (\mathbf{e}_1, \mathbf{z}') \tag{4.53}$$

de unde

$$a=\frac{(\mathbf{e}_1,\mathbf{z}')}{(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3} \tag{4.54}$$

Soluția normală se exprimă concentrat cu determinantul Gramm

$$\mathbf{z}^0=\frac{1}{(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)}\begin{vmatrix}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1,\mathbf{z}')\\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{z}'\end{vmatrix} \tag{4.55}$$

care se dezvoltă după ultima linie.

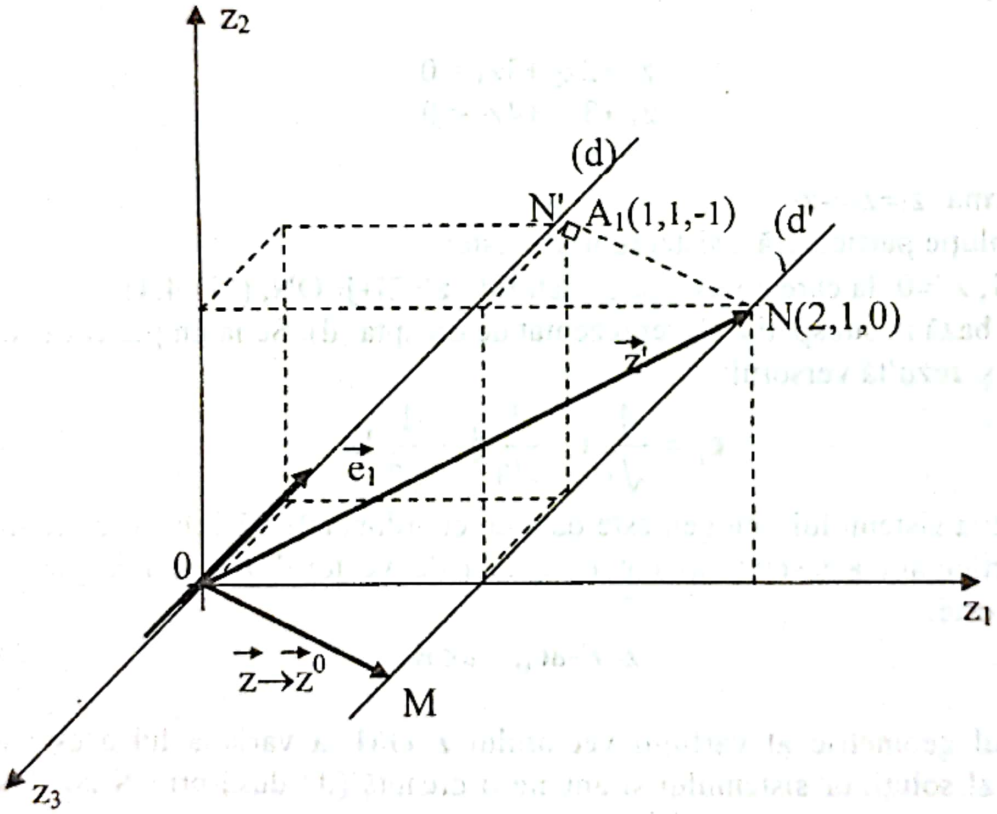


Fig.4.4 Interpretarea geometrică a pseudosoluției unui sistem cu m=3, n=3

Numeric, $\mathbf{z}^0=\mathbf{i}+\mathbf{k}$, deci soluția normală este: $z_1=1$, $z_2=0$, $z_3=1$.
Norma soluției normale este:

$$\left\|\mathbf{z}^0\right\|=\sqrt{2} \tag{4.56}$$

Scanned with OKEN Scanner

Observaţie: geometric, norma soluţiei normale reprezintă înălţimea din N a triunghiului ONA_1. $OA_1=\sqrt{3}$, $ON=\sqrt{5}$, $NA_1=\sqrt{2}$ deci triunghiul este dreptunghic în A_1, şi deci:

$$NA_1=\left\|\mathbf{z}^0\right\|=\sqrt{2} \tag{4.57}$$

ceea ce verifică rezultatul (4.56).

Considerând pseudosoluţiile sistemului sub forma:

$$z_1=2-\lambda,\quad z_2=1-\lambda\quad z_3=\lambda \tag{4.58}$$

pătratul normei soluţiei este:

$$\|\mathbf{z}\|^2=(2-\lambda)^2+(1-\lambda)^2+\lambda^2 \tag{4.59}$$

Se anulează derivata

$$\frac{\partial\|\mathbf{z}\|^2}{\partial\lambda}=0 \tag{4.60}$$

şi se află $\lambda=1$. Rezultă soluţia normală $z_1=1$, $z_2=0$, $z_3=1$, care confirmă rezultatul găsit anterior.

În cazul în care se formulează problema pseudosoluţiei normale în sensul definiţiei mai generale (4.1) cu pseudosoluţia normală raportată la vectorul $\mathbf{z_i=i+j+3k}$
problema se reformulează astfel:

Se cer pseudosoluţiile sistemului (3.48) care sunt cele mai apropiate de tripletul impus (1,1,3).

Se porneşte de la relaţia (4.51). Norma minimă a diferenţei $\|\mathbf{z}-\mathbf{z_i}\|$ se obţine atunci când M este proiecţia punctului Q(1,1,3) pe dreapta d'.

Condiţiile sunt:

$$\mathbf{z}^0=\mathbf{z}'-a\mathbf{e}_1 \tag{4.61}$$

$$(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{z}^0-\mathbf{z}_i)=0 \tag{4.62}$$

şi duc la expresia pseudosoluţiei normale:

Scanned with OKEN Scanner

$$\mathbf{z}^0 = \frac{1}{G(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)}\begin{vmatrix}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1,\mathbf{z}'-\mathbf{z}_i)\\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{z}'\end{vmatrix} \tag{4.63}$$

Numeric:

$$\mathbf{z}^0 = \frac{2}{3}\bar{\mathbf{i}} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{j}} + \frac{4}{3}\bar{\mathbf{k}}$$

deci pseudosoluția normală raportată la vectorul $\mathbf{z}_i=\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ este:

$$z_1 = \frac{2}{3},\ z_2 = -\frac{1}{3},\ z_3 = \frac{4}{3} \tag{4.64}$$

Verificarea rezultatului se face pe două căi.
Prima cale este pe baza calculului diferențial.
Ținând seama de pseudosoluțiile (4.58), norma diferenței este:

$$\|\mathbf{z}-\mathbf{z}_i\|^2=(1-\lambda)^2+(-\lambda)^2+(\lambda-3)^2 \tag{4.65}$$

Anulând derivata se obține $\lambda=4$, de unde cu (4.58) se regăsesc soluțiile (4.64).

Norma diferenței este în acest caz:

$$\|\mathbf{z}^0-\mathbf{z}_i\| = \frac{\sqrt{42}}{3}$$

A doua cale este geometrică.
Se verifică faptul că planul dus prin Q perpendicular pe d' este

$$-z_1-z_2+z_3-1=0$$

iar intersecția acestui plan cu dreapta d' de ecuație

$$x-2=y-1=-z$$

este punctul $M\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$, piciorul perpendicularei din Q pe d'.

Rezultă ușor $QM=\frac{\sqrt{42}}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

4.2.4.ALGORITMUL DE DETERMINARE A PSEUDOSOLUȚIEI NORMALE CU METODA DETERMINANȚILOR GRAMM

Toate trei exemplele au fost conduse pe calea demonstrației generale pentru a face mai intuitivă constatarea că locul geometric al soluției sistemului omogen este un plan (o dreaptă) paralel cu locul geometric al soluției generale a sistemului.

În caz general se notează cu S_0 mulțimea soluțiilor sistemului omogen care definește în R^n un hiperplan cu dimensiunea egală cu gradul de nedeterminare n-r al sistemului [4.4].

Se alege o bază $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_{n-r}}$ în subspațiul S_0. Toți vectorii considerați au n componente, deci sunt în R^n.

Mulțimea soluțiilor este diferența dintre o soluție particulară a sistemului și soluția generală a sistemului omogen.

Se consideră $\mathbf{z'}$ soluția particulară a sistemului dat.

Considerând o soluție oarecare $\mathbf{z}$:

$$\mathbf{z}=\mathbf{z'}-(a_1\mathbf{e_1}+a_2\mathbf{e_2}+\ldots+a_{n-r}\mathbf{e_{n-r}}) \tag{4.66}$$

locul geometric al vârfului vectorului soluție $\mathbf{z}$ este în hiperplanul S paralel cu S_0, deci minimul se va obține când $\mathbf{z}$ va fi paralel cu proiecția originii pe hiperplanul soluției generale S.

Aceeași soluție se obține dacă $\mathbf{z}$ este paralel cu proiecția vârfului vectorului $\mathbf{z'}$ pe S_0.

Rezultă:

$$\mathbf{z^0}=\mathbf{z'}-(a_1\mathbf{e_1}+a_2\mathbf{e_2}+\ldots+a_{n-r}\mathbf{e_{n-r}}) \tag{4.67}$$

Cu condițiile:

$$\begin{aligned}&(\mathbf{e_1}, \mathbf{z^0})=0\\&(\mathbf{e_2}, \mathbf{z^0})=0\\&\vdots\\&(\mathbf{e_{n-r}}, \mathbf{z^0})=0\end{aligned} \tag{4.68}$$

folosind (4.67) și eliminând pe $\mathbf{z^0}$ avem sistemul:

$$\begin{aligned}&a_1(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_1})+a_2(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})+\ldots+a_{n-r}(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_{n-r}})=(\mathbf{e_1}, \mathbf{z'})\\&a_1(\mathbf{e_2}, \mathbf{e_1})+a_2(\mathbf{e_2}, \mathbf{e_2})+\ldots+a_{n-r}(\mathbf{e_2}, \mathbf{e_{n-r}})=(\mathbf{e_2}, \mathbf{z'})\\&\qquad\vdots\\&a_1(\mathbf{e_{n-r}}, \mathbf{e_1})+a_2(\mathbf{e_{n-r}}, \mathbf{e_2})+\ldots+a_{n-r}(\mathbf{e_{n-r}}, \mathbf{e_{n-r}})=(\mathbf{e_{n-r}}, \mathbf{z'})\end{aligned} \tag{4.69}$$

Sistemul are determinant Gramm strict pozitiv [4.5].

Scanned with OKEN Scanner

Se poate rezolva şi exprima z^0 cu relaţia (4.67) sau se poate folosi forma mai elegantă cu determinantul Gramm care se dezvoltă după ultima linie:

$$z^0 = \frac{1}{G[e_1, e_2, \ldots, e_{n-r}]} = \begin{vmatrix} (e_1, e_1) & \ldots & (e_1, e_{n-r}) & (e_1, z') \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (e_{n-r}, e_1) & \ldots & (e_{n-r}, e_{n-r}) & (e_{n-r}, z') \\ e_1 & \ldots & e_{n-r} & z' \end{vmatrix} \qquad (4.70)$$

Discutăm acum cazul în care pseudosoluţia normală se defineşte prin (4.1).

Se face acelaşi raţionament ca şi la demonstraţia anterioară până la exprimarea soluţiei **z** cu relaţia (4.66).

Locul geometric al soluţiei **z** este hiperplanul Ṡ paralel cu S_0. Minimul normei $\|z-z_i\|$ se realizează atunci când vectorul $z-z_i$ va fi perpendicular pe hiperplanul S.

Condiţiile sunt:

$$z^0 = z' - (a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_{n-r} e_{n-r}) \qquad (4.73)$$

$$\begin{aligned} (e_1, z^0 - z_i) &= 0 \\ (e_2, z^0 - z_i) &= 0 \\ &\ldots \\ (e_{n-r}, z^0 - z_i) &= 0 \end{aligned} \qquad (4.74)$$

Se ajunge uşor la soluţia:

$$z^0 = \frac{1}{G[e_1, e_2, \ldots, e_{n-r}]} = \begin{vmatrix} (e_1, e_1) & \ldots & (e_1, e_{n-r}) & (e_1, z'-z_i) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (e_{n-r}, e_1) & \ldots & (e_{n-r}, e_{n-r}) & (e_{n-r}, z'-z_i) \\ e_1 & \ldots & e_{n-r} & z' \end{vmatrix} \qquad (4.75)$$

Scanned with OKEN Scanner

4.3. METODA COEFICIENȚILOR BINOMIALI PENTRU DETERMINAREA PSEUDOSOLUȚIILOR NORMALE

4.3.1.LEGĂTURA DINTRE PSEUDOSOLUȚIA NORMALĂ ȘI SOLUȚIA REGULARIZATĂ

Orice problemă de sinteză a câmpului electromagnetic presupune patru etape [4.6]:

1) Stabilirea modelului fizic; 2) Alegerea modelului matematic; 3) Prelucrarea modelului matematic; 4) Rezolvarea sistemului de ecuații:

$$\mathbf{Az=u} \tag{4.76}$$

specific sintezei cu metode specifice. În general **A** este un operator oarecare, dar aici se va discuta situația (cel mai des întâlnită) când **A** este o matrice pătrată cu n linii şi cu n coloane.

Problema sintezei fiind aproape în exclusivitate o problemă fără soluție unică, matricea **A** rezultă aproape întotdeauna degenerată şi sistemul de ecuații (4.76) la fel.

Trebuie însă să se observe că datorită faptului că în operațiile efectuate pe calculator se lucrează cu o anumită precizie influențată inclusiv de pragul de zero ales [4.7], este posibil ca sistemul să rezulte nedegenerat dar rău condiționat [4.8](condiționarea sistemelor se va trata în amănunt în capitolul următor).

Cum în general un sistem de forma (4.76) are o infinitate de soluții aproximative, se pune problema de a alege dintre ele acele soluții pentru care norma erorii este minimă (pseudosoluții), iar mai departe dintre acestea se caută cele care au norma minimă (pseudosoluțiile normale), (4.1), (4.2). Dacă din punct de vedere matematic există multe argumente ca pseudosoluția normală să fie considerată rezolvarea ideală a sistemului (4.76), din punct de vedere tehnic este posibil ca ea să nu fie convenabilă. În această situație se recurge la regularizare.

Metoda regularizării sistemelor degenerate (prezentată la cap. 2.3) permite găsirea unei aşa-numite soluții regularizate care este stabilă la variațiile mici ale membrului doi al ecuației (4.76), deci este aplicabilă şi sistemelor rău condiționate.

Metoda presupune determinarea soluției **z** care minimizează funcționala:

$$M^{\alpha}(\mathbf{z},\mathbf{u})=\| \mathbf{Az-u} \|^2+\alpha \| \mathbf{z} \|^2 \tag{4.77}$$

Se pune problema să găsim ce legătură există între soluția regularizată şi pseudosoluția normală.

Scanned with OKEN Scanner

Din relația (4.77) se observă ușor că cu cât parametrul de regularizare α ia valori mai mici, ponderea normei soluției în funcțională scade și ponderea normei erorii crește. Este de așteptat așadar ca la valori din ce în ce mai mici ale lui α minimizarea funcționalei să se reflecte din ce în ce mai mult în minimizarea normei erorii, iar la limită, adică atunci când parametrul de regularizare α tinde la zero, este de așteptat ca norma erorii să ajungă la valoarea minimă, care este asigurată chiar de către pseudosoluție. În această situație minimizarea funcționalei se mai poate realiza numai pe baza normei pseudosoluției, al cărei minim este pseudosoluția normală.

Aceste observații de ordin intuitiv se vor demonstra în cele ce urmează, mai exact se va arăta că soluția regularizată $\mathbf{z}(\alpha)$ ce realizează minimul funcționalei tinde la pseudosoluția normală $\mathbf{z}^0$ atunci când parametrul de regularizare tinde la zero.

Dacă sistemul (4.76) este compatibil, atunci **u** aparține hiperplanului U_A generat de **Az** . În general sistemul nu este compatibil, astfel că **u** are extremitatea în afara hiperplanului U_A. Se va nota cu $\mathbf{v}_A$ proiecția vectorului **u** pe hiperplanul U_A Astfel vectorul diferență $\mathbf{u}-\mathbf{v}_A$ va fi ortogonal pe U_A (Fig.4.5)

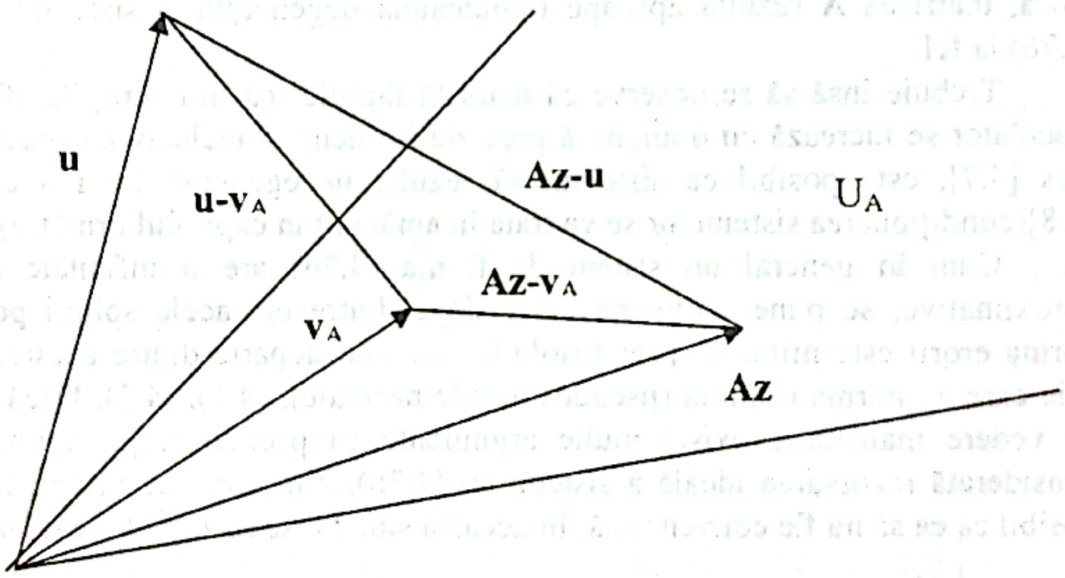


Fig.4.5 $\mathbf{Az}=\mathbf{u}$, sistem incompatibil, $\mathbf{Az}=\mathbf{v}_A$ sistem compatibil, U_A mulțimea valorilor **Az**

Rezultă că între norme există relația

$$\| \mathbf{Az}-\mathbf{u} \|^2 = \| \mathbf{Az}-\mathbf{v}_A \|^2 + \| \mathbf{u}-\mathbf{v}_A \|^2 \qquad (4.78)$$

Cum $\mathbf{v}_A$ este în hiperplanul U_A sistemul

$$\mathbf{Az}-\mathbf{v}_A = \mathbf{0} \qquad (4.79)$$

este compatibil.

Funcționala a cărei minimizare duce la soluția regularizată a sistemului (4.79) este

Scanned with OKEN Scanner

$$M^{\alpha}(z,v_A) = \| \ Az-v_A \ \|^2+\alpha \| \ z \ \|^2 \tag{4.80}$$

Dacă în (4.77) se substituie expresia din relaţia (4.78) rezultă

$$M^{\alpha}(z,u) = \| \ Az-v_A \ \|^2 + \| \ u-v_A \ \|^2 + \alpha \| \ z \ \|^2 \tag{4.81}$$

Ţinând seama de (4.80), ultima relaţie se poate scrie

$$M^{\alpha}(z,u) = M^{\alpha}(z,v_A) + \| \ u-v_A \ \|^2 \tag{4.82}$$

Rezultă de aici că soluţia regularizată $z=z(\alpha)$ care face minimă funcţionala $M^{\alpha}(z,u)$ minimizează şi funcţionala $M^{\alpha}(z,v_A)$ pentru că expresia $\| \ u-v_A \ \|^2$ nu depinde de $z(\alpha)$. Aşadar cele două funcţionale au aceeaşi soluţie regularizată.

Sistemul (4.79), sistem compatibil, are printre pseudosoluţii (norma erorii este minimă, respectiv nulă) şi pseudosoluţia normală

$$Az^0-v_A = 0 \tag{4.83}$$

Pentru pseudosoluţia normală relaţia (4.80) devine

$$M^{\alpha}(z^0,v_A) = \alpha \| \ z^0 \ \|^2 \tag{4.84}$$

Să notăm cu $z(\alpha)$ soluţia regularizată care minimizează funcţionala $M^{\alpha}(z,v_A)$. Evident că avem inegalităţile

$$\alpha \| \ z(\alpha) \ \|^2 \le \| \ Az(\alpha)-v_A \ \|^2+\alpha \| \ z(\alpha) \ \|^2 = M^{\alpha}(z(\alpha),v_A) \tag{4.85}$$

Funcţionala $M^{\alpha}(z(\alpha),v_A)$ fiind considerată minimă, rezultă că funcţionala ce corespunde pseudosoluţiei normale $M^{\alpha}(z^0,v_A)$ va fi mai mare decât ea, adică, ţinând seama şi de (4.84)

$$M^{\alpha}(z(\alpha),v_A) \le M^{\alpha}(z^0,v_A) = \alpha \| \ z^0 \ \|^2 \tag{4.86}$$

Din (4.85) şi (4.86) rezultă

$$\| \ z(\alpha) \ \|^2 \le \| \ z^0 \ \|^2 = d \tag{4.87}$$

S-a ajuns la un rezultat intermediar interesant, şi anume că norma soluţiei regularizate, care minimizează funcţionala $M^{\alpha}(z,u)$ (sau funcţionala $M^{\alpha}(z,v_A)$, ceea ce este acelaşi lucru după cum s-a arătat) este mai mică decât norma pseudosoluţiei normale. Consecinţele practice ale acestei constatări sunt foarte importante în sensul că dacă pseudosoluţia normală nu convine datorită normei exagerat de mari (soluţie nerealizabilă practic) sunt speranţe ca soluţia regularizată să fie mai convenabilă sub acest aspect.

Din $\| \ z(\alpha) \ \|^2 \le d$ rezultă că elementele $z(\alpha)$ aparţin unei mulţimi compacte (adică unei mulţimi mărginite şi care conţine toate punctele de acumulare). Consecinţa imediată este că din mulţimea elementelor $z(\alpha)$ se poate extrage un şir $z(\alpha_k)$ cu proprietatea că atunci când α_k tinde la zero, şirul $z(\alpha_k)$ tinde la o valoare z^0_1 care face parte din aceeaşi mulţime.

Funcţionala $M^{\alpha}(z(\alpha_k),v_A)$ îşi realizează minimul pentru $z(\alpha_k)$

Scanned with OKEN Scanner

$$\min\{ M^{\alpha}(z(\alpha_k),v_A)\}=\min\{ \lim_{\alpha_k \to 0} \| Az(\alpha_k)-v_A \|^2+\alpha_k \| z(\alpha_k) \|^2\}=$$

$$=\min\{\| Az^0{}_1-v_A \|^2\}$$

Dar minimul expresiei $\{\| Az^0{}_1-v_A \|^2\}$ există. Mai mult decât atât, acest minim este chiar zero, sistemul $Az=v_A$ fiind compatibil. Dar dacă $Az^0{}_1-v_A=0$ înseamnă că $z^0{}_1$ este pseudosoluție, iar orice pseudosoluție care minimizează funcționala este evident pseudosoluție normală. Așadar

$$z^0{}_1 = z^0 \qquad (4.88)$$

Rezultă că atunci când parametrul de regularizare tinde la zero, soluția regularizată $z(\alpha)$ care realizează minimul funcționalei, tinde către pseudosoluția normală z^0.

4.3.2 BAZA MATEMATICĂ A METODEI COEFICIENȚILOR BINOMIALI

Condiția de minimizare a relației (4.77) este echivalentă cu:

$$(A^TA+\alpha I_n) z = A^Tu \qquad (4.89)$$

după cum s-a arătat la cap.2.3.2, relația (2.59).

A^TA fiind o matrice simetrică (se verifică prin calcul direct) se poate exprima sub forma

$$A^TA=PLP^T \qquad (4.90)$$

unde P este matricea de pasaj, ortogonală și unitară iar $L=\text{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$ este matricea diagonală a valorilor proprii, pozitive pentru că A^TA are numai valori proprii pozitive. Relația (4.90) fiind fundamentală pentru metoda coeficienților binomiali, se va insista asupra amănuntelor legate de ea.

Matricea A^TA are valorile proprii pozitive pentru că este pozitiv semidefinită.

Pentru demonstrație să considerăm λ_i o valoare proprie a matricei A^TA și X_i vectorul propriu corespunzător. Rezultă că $A^TA\ X_i = \lambda_i X_i$. Prin înmulțire la stânga cu X_i^T avem $(AX_i)^T AX_i = \lambda_i X_i^T X_i$ de unde $\|AX_i\|^2 = \lambda_i \|X_i\|^2$ deci λ_i este pozitivă.

Matricea diagonală L are forma cunoscută

$$L=\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{vmatrix} \qquad (4.91)$$

Dacă notăm matricea simetrică $A^TA=B$ atunci valorile proprii ale acestei matrice se determină din sistemul

$$\det(B-\lambda I_n)=0 \qquad (4.92)$$

Scanned with OKEN Scanner

Determinantul sistemului omogen

$$(B-\lambda_k I_n)X_k = 0 \tag{4.93}$$

are valoarea zero, fiind chiar determinantul din relația (4.92), deci acest sistem este compatibil şi nedeterminat. Rezultă relația cunoscută

$$B\,X_k = \lambda_k\,X_k \tag{4.94}$$

Aşadar X_k este un vector propriu care depinde cel puțin de un parametru care poate fi luat arbitrar

$$X_k = \begin{vmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \\ \vdots \\ x_{kn} \end{vmatrix} \tag{4.95}$$

Dacă fiecare element al matricei coloană se împarte cu suma pătratelor elementelor atunci vectorul propriu X_k se spune că este normat, adică

$$\|X_k\| = 1 \tag{4.96}$$

Fiecare din cele n valori proprii are câte un vector propriu corespunzător care poate fi luat de normă unitară. Aceşti vectori proprii constituie fiecare câte o coloană a unei matrici care se numeşte matricea de pasaj.

Matricea de pasaj este de forma:

$$P = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} \tag{4.97}$$

În cazul unei matrici simetrice B produsul scalar a doi vectori proprii este nul.

Pentru demonstrație considerăm identitatea cunoscută [4.9]

$$(M\,u, v) = (u, M^T v) \tag{4.98}$$

unde **M** este o matrice pătrată iar **u** şi **v** sunt matrici coloană. Această identitate se poate verifica prin calcul direct.

Dacă în relația de mai sus se înlocuieşte matricea **M** oarecare cu matricea **B** care (fiind simetrică) este identică cu transpusa ei, avem

$$(B\,u, v) = (u, B\,v) \tag{4.99}$$

Considerăm că **u** şi **v** sunt doi vectori proprii $u=X_k$, $v=X_j$

Rezultă

$$(BX_k, X_j) = (X_k, BX_j) \tag{4.100}$$

Cu (4.94) ultima relație se scrie

$$(\lambda_k X_k, X_j) - (X_k, \lambda_j X_j) = 0 \tag{4.101}$$

Scanned with OKEN Scanner

adică:

$$(\lambda_k-\lambda_j)(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_j)=0 \qquad (4.102)$$

de unde rezultă că vectorii proprii sunt ortogonali.
Cum toți vectorii proprii pot fi considerați normați (4.96) rezultă că:

$$\mathbf{P}^T\mathbf{P}=\mathbf{I}_n \qquad (4.103)$$

De unde

$$\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{P}^T \qquad (4.104)$$

În concluzie matricea de pasaj corespunzătoare unei matrice simetrice este formată din vectori ortogonali și ortonormați, astfel încât matricea inversă este aceeași cu matricea transpusă.

Rămâne de arătat că o matrice simetrică **B** se poate scrie sub forma:

$$\mathbf{B}=\mathbf{PLP}^T \qquad (4.105)$$

Se observă că

$$\mathbf{BP} = (\mathbf{BX}_1 , \mathbf{BX}_2 ,\ldots \mathbf{BX}_n) = (\lambda_1\mathbf{X}_1 , \lambda_2\mathbf{X}_2 ,\ldots \lambda_n\mathbf{X}_n) = \mathbf{PL} \qquad (4.106)$$

La a doua egalitate s-a ținut seama de (4.94)
Din (4.106) prin înmulțire la dreapta cu $\mathbf{P}^T$ rezultă direct (4.105) și prin aceasta (4.90) este demonstrată.

4.3.3. FORMULA DE CALCUL A PSEUDOSOLUȚIEI NORMALE

Se înlocuiește în (4.89) relația (4.90) și rezultă

$$(\mathbf{PLP}^T+\alpha\mathbf{I}_n)\mathbf{z}=\mathbf{A}^T\mathbf{u} \qquad (4.107)$$

Se înmulțește relația (4.107) la stânga cu $\mathbf{P}^T$ și ținând seama că $\mathbf{P}^T\mathbf{P}=\mathbf{I}_n$ rezultă:

$$(\mathbf{LP}^T+\alpha\mathbf{P}^T)\mathbf{z}=\mathbf{P}^T\mathbf{A}^T\mathbf{u} \qquad (4.108)$$

sau:

$$(\mathbf{L}+\alpha\mathbf{I})\mathbf{P}^T\mathbf{z}=\mathbf{P}^T\mathbf{A}^T\mathbf{u} \qquad (4.109)$$

Se notează:

$$\mathbf{P}^T\mathbf{z} = \mathbf{y} \qquad (4.110)$$

și:

$$\mathbf{P}^T\mathbf{A}^T\mathbf{u}=\mathbf{F} \qquad (4.111)$$

iar (4.109) devine:

$$(\mathbf{L}+\alpha\mathbf{I})\mathbf{y}=\mathbf{F} \qquad (4.112)$$

Scanned with OKEN Scanner

Se rezolvă sistemul (4.112) pentru fiecare din parametrii de regularizare α_k (k=1,2,..., m) rezultând soluțiile $\mathbf{y}(\alpha_k)$, unde $\mathbf{y}(\alpha_k)$ este o matrice coloană cu n linii, având pe linia i elementul $\frac{F_i}{\lambda_i + \alpha_k}$.

Pseudosoluția normală a sistemului se obține din matricea coloană $\mathbf{y}(0)$ (adică $\mathbf{y}(\alpha)$ pentru $\alpha=0$) având pe linia i elementul $\frac{F_i}{\lambda_i}$.

Se pune problema de a găsi o exprimare a soluției $\mathbf{y}(0)$ care dă pseudosoluția normală $\mathbf{z}^0$ în funcție de soluțiile $\mathbf{y}(\alpha_1)$, $\mathbf{y}(\alpha_2)$,... $\mathbf{y}(\alpha_m)$, adică de a găsi niște coeficienți $a_1, a_2, \ldots, a_m$ astfel încât:

$$\mathbf{y}(0) = a_1\,\mathbf{y}(\alpha_1) + a_2\,\mathbf{y}(\alpha_2) + \ldots + a_m\,\mathbf{y}(\alpha_m) + \mathbf{r} \qquad (4.113)$$

$\mathbf{r}$ fiind o matrice coloană care exprimă eroarea.

Se ia în considerare numai linia i și rezultă:

$$\frac{F_i}{\lambda_i} = \sum_{k=1}^{m} a_k \frac{F_i}{\lambda_i + \alpha_k} + r_i \qquad (4.114)$$

sau

$$\frac{F_i}{\lambda_i} = \frac{F_i}{\lambda_i} \sum_{k=1}^{m} a_k \frac{1}{1 + \frac{\alpha_k}{\lambda_i}} + r_i \qquad (4.115)$$

Alegerea parametrilor α_k (k=1,2,...,m) fiind arbitrară, se poate presupune că se ia

$$\text{Max.}\{\alpha_k\} = \alpha_m < \text{min.}\{\lambda_i\} = \lambda_0 \qquad (4.116)$$

unde λ_0 este cea mai mică dintre valorile proprii diferite de zero, astfel încât se poate scrie dezvoltarea în serie:

$$\frac{1}{1 + \frac{\alpha_k}{\lambda_i}} = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \left(\frac{\alpha_k}{\lambda_i}\right)^l \qquad (4.117)$$

Folosind (4.117), și considerând că parametrii de regularizare se iau în progresie aritmetică astfel că $\alpha_k = k\,\alpha_1$, relația (4.115) se scrie:

$$\frac{F_i}{\lambda_i} = \frac{F_i}{\lambda_i} \sum_{k=1}^{m} a_k + \frac{F_i}{\lambda_i} \sum_{k=1}^{m} a_k \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l k^l \left(\frac{\alpha_1}{\lambda_i}\right)^l + r_i \qquad (4.118)$$

Se observă că dacă:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = 1 \qquad (4.119)$$

și

Scanned with OKEN Scanner

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l k^l \left(\frac{\alpha_1}{\lambda_i}\right)^l = 0 \qquad (4.120)$$

atunci exprimarea componentei i a lui y(0) ar fi exactă şi deci $r_i=0$.

Acest lucru însă nu este posibil pentru că dispunând de numai m coeficienţi se pot pune numai m condiţii, respectiv (4.119) precum şi anularea termenilor din dezvoltare până la l=m-1 inclusiv.

Rezultă sistemul de m ecuaţii:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = 1$$

$$\sum_{k=1}^{m} a_k k^l = 0 \quad l=1,2,\ldots (m-1) \qquad (4.121)$$

Determinantul principal este de tip Vandermonde, iar Δa_k se scrie direct

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & m \\ 1^2 & 2^2 & \ldots & m^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2^{m-1} & \ldots & m^{m-1} \end{vmatrix} = 1!2!\ldots(m-2)!(m-1)! = V \qquad (4.122)$$

$$\Delta a_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & (k-1) & 0 & (k+1) & \ldots & m \\ 1 & 2^2 & \ldots & (k-1)^2 & 0 & (k+1)^2 & \ldots & m^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2^{m-1} & \ldots & (k-1)^{m-1} & 0 & (k+1)^{m-1} & \ldots & m^{m-1} \end{vmatrix} \qquad (4.123)$$

Se dezvoltă determinantul după coloana k. Se dă apoi factor comun pe fiecare coloană şi rezultă un alt determinant de tip Vandermonde care se calculează uşor

$$\Delta a_k = (-1)^{k+1} \frac{m!}{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & (k-1) & (k+1) & \ldots & m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2^{m-1} & \ldots & (k-1)^{m-1} & (k+1)^{m-1} & \ldots & m^{m-2} \end{vmatrix} =$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= (-1)^{k+1} \frac{m!}{k} \frac{V}{(k-1)!(m-k)!} \qquad (4.124)$$

Rezultă:

$$a_k = (-1)^{k+1} C_m^k \qquad (4.125)$$

Aşadar relaţia (4.114) se poate scrie explicit:

$$\frac{F_i}{\lambda_i} = C_m^1 \frac{F_i}{\lambda_i + \alpha_1} - C_m^2 \frac{F_i}{\lambda_i + \alpha_2} + \ldots + (-1)^{m+1} C_m^m \frac{F_i}{\lambda_i + \alpha_m} + r_i \qquad (4.126)$$

sau concentrat

$$\frac{F_i}{\lambda_i} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} C_m^k \frac{F_i}{\lambda_i + \alpha_k} + r_i \qquad (4.127)$$

Relaţia (4.113) devine

$$\mathbf{y}(0) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} C_m^k \mathbf{y}(\alpha_k) + \mathbf{r} \qquad (4.128)$$

Se ţine seama de (4.110), se înmulţeşte (4.128) la stânga cu matricea de pasaj **P**, şi rezultă pseudosoluţia normală

$$\mathbf{z}^0 = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} C_m^k \mathbf{z}(\alpha_k) + \mathbf{P}\,\mathbf{r} \qquad (4.129)$$

Expresia exactă a pseudosoluţiei normale este dată de relaţia de mai sus care înglobează şi vectorul eroare **Pr**. Primul termen din membrul drept al relaţiei (4.129) care va fi folosit în calculul pseudosoluţiei normale se va numi pseudosoluţie normală de calcul şi se va nota $\mathbf{z}^0_c$

$$\mathbf{z}^0_c = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} C_m^k \mathbf{z}(\alpha_k) \qquad (4.130)$$

Să remarcăm că pseudosoluţia normală de calcul este expresia aproximativă a pseudosoluţiei normale aşa cum rezultă ea din aplicarea metodei coeficienţilor binomiali.

Scanned with OKEN Scanner

4.3.4.EVALUAREA ERORII ABSOLUTE ŞI RELATIVE

Restul provine din termenii dezvoltării în serie de tipul (4.117) începând de la puterea m, asupra cărora s-au pus condiţii la determinarea coeficienţilor a_k.

Aşadar din (4.118)

$$|r_i| = \left| \frac{F_i}{\lambda_i} \sum_{k=1}^{m} a_k \sum_{l=m}^{\infty} (-1)^l \left(\frac{\alpha_k}{\lambda_i} \right)^l \right| \tag{4.131}$$

Ţinând seama că pentru seria:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l x^l + R_{m-1}(x)$$

există evaluarea restului sub forma Lagrange [4.10]

$$R_{m-1}(x) = \frac{x^m}{m!} \left(\frac{1}{1+x} \right)_{x=\eta}^{(m)} = (-1)^m \frac{x^m}{1+\eta} \tag{4.132}$$

unde $\eta \in (0, x)$ şi x subunitar

rezultă:

$$|r_i| = \left| \frac{F_i}{\lambda_i} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} C_m^k (-1)^m \left(\frac{\alpha_k}{\lambda_i} \right)^m \frac{1}{1+\eta} \right| \le \left| \frac{F_i \alpha_1^m}{\lambda_i^{m+1}} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} k^m C_m^k \right| \tag{4.133}$$

dar

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} k^m C_m^k = m! \tag{4.134}$$

Pentru demonstrarea relaţiei (4.46) se consideră identitatea:

$$(1-x)^m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k x^k$$

se derivează şi se înmulţeşte cu x succesiv de m ori apoi se face în rezultat x=1.

Se face observaţia că la inegalitatea (4.133) s-a luat în considerare un η mediu. Având în vedere că în suma din membrul stâng termenii sunt alternanţi iar valorile care îl limitează superior pe η sunt în progresie aritmetică, practic se poate admite această aproximare.

Cu (4.134) relaţia (4.133) devine:

$$|r_i| < \left| \frac{F_i \alpha_i^m m!}{\lambda_i^{m+1}} \right| \tag{4.135}$$

sau

Scanned with OKEN Scanner

$$|r_i| < \frac{|F_i|}{\lambda_0^{m+1}} \alpha_1^m m! \tag{4.136}$$

Ţinând seama de expresia normei rezultă o primă evaluare a restului:

$$\| \mathbf{r} \| < \| \mathbf{F} \| \frac{\alpha_1^m}{\lambda_0^{m+1}} m! \tag{4.137}$$

Din (4.129) şi (4.130) avem

$$\| \mathbf{z}^0 - \mathbf{z}_c^0 \| = \| \mathbf{Pr} \| \tag{4.138}$$

dar:

$$\| \mathbf{Pr} \| = \| \mathbf{r} \| \tag{4.139}$$

după cum se demonstrează uşor în continuare.

Într-adevăr, ţinând seama de faptul că $\mathbf{PP}^T = \mathbf{I}_n$ rezultă:

$$\| \mathbf{Pr} \|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ki} r_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \sum_{k=1}^{n} x_{ki}^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j.}}^{n} r_i r_j \sum_{k=1}^{n} x_{ki} x_{kj} = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \| \mathbf{r} \|^2 \tag{4.140}$$

Deci:

$$\| \mathbf{z}^0 - \mathbf{z}_c^0 \| = \| \mathbf{r} \| \tag{4.141}$$

Analog:

$$\|\mathbf{F}\| = \|\mathbf{P}^T \mathbf{A}^T \mathbf{u}\| = \|\mathbf{A}^T \mathbf{u}\| \tag{4.142}$$

Astfel se obţine o evaluare a normei vectorului eroare absolută:

$$\| \mathbf{z}^0 - \mathbf{z}_c^0 \| = \| \mathbf{r} \| < \| \mathbf{A}^T \mathbf{u} \| \frac{\alpha_1^m}{\lambda_0^{m+1}} m! \tag{4.143}$$

Pentru a determina raportul dintre norma vectorului eroare absolută şi norma soluţiei normale, raport care se va numi eroare relativă se porneşte de la relaţia (4.135):

$$|r_i| < \frac{|F_i|}{\lambda_1^{m+1}} \alpha_1^m m!$$

care se transformă succesiv astfel:

$$r_i^2 < \frac{F_i^2}{\lambda_i^2} \frac{1}{\lambda_i^{2m}} (\alpha_1^m m!)^2 < \frac{F_i^2}{\lambda_i^2} \frac{1}{\lambda_0^{2m}} (\alpha_1^m m!)^2 \tag{4.144}$$

Scanned with OKEN Scanner

Însumând cele n relații de tipul (4.144) și ținând seama că:

$$y(0)=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{F_i^2}{\lambda_i^2}\right)^{1/2} \tag{4.145}$$

rezultă:

$$\| \mathbf{r} \| < \| y(0) \| \frac{\alpha_1^m m!}{\lambda_0^m} \tag{4.146}$$

Dar ținând seama de relația (4.140) și de faptul că:

$$\| \mathbf{z}^0 \| = \| \mathbf{P}y(0) \| = \| y(0) \| \tag{4.147}$$

rezultă:

$$\| \mathbf{z}^0-\mathbf{z}^0_c \| < \| \mathbf{z}^0 \| \frac{\alpha_1^m}{\lambda_0^m} m! \tag{4.148}$$

sau:

$$\frac{\|\mathbf{z}^0-\mathbf{z}^0_c\|}{\|\mathbf{z}^0\|} < \frac{\alpha_1^m m!}{\lambda_0^m} \tag{4.149}$$

adică eroarea relativă are proprietatea

$$e_r < \frac{\alpha_1^m m!}{\lambda_0^m} \tag{4.150}$$

4.3.5.APLICAREA METODEI COEFICIENȚILOR BINOMIALI LA EVALUAREA PARAMETRULUI DE REGULARIZARE

Problema determinării parametrului de regularizare este cea mai dificilă etapă ce apare la soluționarea problemelor de sinteză.

Metoda propusă duce la o cale de evaluare a valorii parametrului de regularizare.

Astfel dacă în relația (4.143):

$$\| \mathbf{z}^0-\mathbf{z}^0_c \| < \| \mathbf{A}^T\mathbf{u} \| \frac{\alpha_1^m}{\lambda_0^{m+1}} m!$$

se impune valoarea normei vectorului eroare absolută:

$$e_z = \| \mathbf{z}^0-\mathbf{z}^0_c \| \tag{4.151}$$

Scanned with OKEN Scanner

atunci, pentru un m fixat se poate determina parametrul de regularizare α_1 care duce la soluționare problemei:

$$\alpha_1 = \lambda_0 \sqrt[m]{e_z \frac{\lambda_0}{m!}} \left\| \mathbf{A}^T \mathbf{u} \right\|^{-\frac{1}{m}} \tag{4.152}$$

Relația (4.152) dă cea mai mare valoare posibilă pentru α pentru care inegalitatea (4.143) mai subzistă.

Să mai observăm că teoria elaborată este valabilă numai în ipoteza presupusă la (4.116), adică:

$$m\alpha_1 < \lambda_0 \tag{4.153}$$

O relație echivalentă se poate obține cu formula lui Stirling [4.12]:

$$\frac{e^m}{\sqrt{m}} < \frac{2{,}4313}{\lambda_0 e_z} \left(\left\| \mathbf{A}^T \mathbf{u} \right\| \right)^{-1} \tag{4.154}$$

Această relație limitează superior valorile care se pot alege pentru m.

Cu cât m este mai mare, pentru un α_1 fixat, $m\frac{\alpha_1}{\lambda_0}$ este mai mare, deci este de așteptat ca dezvoltarea în serie să fie mai puțin precisă, dar pe de altă parte cu cât m este mai mare și numărul termenilor luați în calculul seriei este mai mare și deci este de așteptat ca aproximarea să fie mai bună. În concluzie trebuie reținut că nu se poate face o legătură între m și precizia soluției.

Expresia (4.149) a erorii relative este mai dificil de folosit în determinarea lui α_1 datorită imposibilității de a evalua apriori norma pseudosoluției normale.

Etapele de calcul ale pseudosoluției normale cu metoda coeficienților binomiali sunt, pe scurt, următoarele:

1. Se alege precizia e_z dorită.
2. Se calculează λ_0, cea mai mică dintre valorile proprii nenule ale matricii $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$.
3. Se alege $m \in N$ și se verifică dacă îndeplinește condiția (4.153). În caz că nu îndeplinește această condiție, el se ia mai mic, așa încât condiția să fie satisfăcută.
4. Se calculează α_1 cu relația (4.152) .
5. Se rezolvă sistemul (4.89) pentru α_1, $2\alpha_1$,...$m\alpha_1$ și se pune fiecare soluție sub forma matricii coloană $\mathbf{z}(\alpha_1)$, $\mathbf{z}(\alpha_2)$,... $\mathbf{z}(\alpha_m)$.
6. Se determină pseudosoluția normală cu formula (4.130).

Scanned with OKEN Scanner

Se vor prezenta aspectele mai importante ale aplicării metodei pe un sistem degenerat cu m=3, n=3, a cărei pseudosoluție normală a fost găsită anterior cu metoda determinanților Gramm.

4.3.6.DETERMINAREA PSEUDOSOLUȚIEI NORMALE A UNUI SISTEM DEGENERAT CU m=3, n=3 CU METODA COEFICIENȚILOR BINOMIALI

Se consideră sistemul cu care s-a ilustrat aflarea pseudosoluției cu metoda determinanților Gramm (cap.3.2.1.) şi cu metoda minimizării normei erorilor (cap.3.3). Acelaşi sistem s-a folosit, alături de alte sisteme simple, pentru exemplificarea metodei determinanților Gramm de aflare a pseudosoluției normale (cap.4.2.3.).

Reamintim sistemul **Az=u**

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 + 3z_3 = 7 \\ z_1 + 3z_2 + 4z_3 = 8 \\ 2z_1 + 5z_2 + 7z_3 = 6 \end{cases} \qquad (4.155)$$

a cărei pseudosoluție normală calculată cu metodele prezentate anterior este tripletul (1,0,1).

Sistemul este degenerat, det **A**=0 şi incompatibil.

Prin înmulțire la stânga cu $\mathbf{A}^T$ se obține $\mathbf{A}^T\mathbf{Az}=\mathbf{A}^T\mathbf{u}$, adică

$$\begin{cases} 6z_1 + 15z_2 + 21z_3 = 27 \\ 15z_1 + 38z_2 + 53z_3 = 68 \\ 21z_1 + 53z_2 + 74z_3 = 95 \end{cases} \qquad (4.156)$$

tot un sistem degenerat, dar compatibil nedeterminat, soluțiile acestui sistem constituind pseudosoluții ale sistemului (4.155).

Valorile proprii ale matricii $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ sunt 117,923, 0,076 şi 0.

Astfel că în (4.152) λ_0 va fi 0,076.

Se alege m=3, se fixează eroarea $e_z=10^{-5}$ şi rezultă $\alpha_1=7{,}74\ 10^{-5}$.

Este o valoare orientativă şi mult acoperitoare, în sensul că este de aşteptat ca eroarea să fie cea impusă chiar la valori mai mari decât $7{,}74\ 10^{-5}$.

Regularizarea acestui sistem presupune introducerea parametrului de regularizare α şi rezolvarea sistemului:

Scanned with OKEN Scanner

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A}+\alpha\mathbf{I})\mathbf{z}=\mathbf{A}^T\mathbf{u} \tag{4.157}$$

adică

$$\begin{cases}(6+\alpha)z_1+15z_2+21z_3=27\\15z_1+(38+\alpha)z_2+53z_3=68\\21z_1+53z_2+(74+\alpha)z_3=95\end{cases} \tag{4.158}$$

Se rezolvă sistemul pentru $\alpha_1=10^{-2}$, $\alpha_2=2\ 10^{-2}$, $\alpha_3=3\ 10^{-2}$
Rezultă

$$\mathbf{z}(10^{-2})=\begin{pmatrix}0,9106000923\\0,0667969863\\0,9773970786\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{z}(2*10^{-2})=\begin{pmatrix}0,8397591634\\0,1197140946\\0,959473258\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{z}(3*10^{-2})=\begin{pmatrix}0,7822405091\\0,1626677511\\0,9449082602\end{pmatrix}$$

Pseudosoluția normală se află cu (4.130)

$$\mathbf{z}^0_c=\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+1}C_3^k\,\mathbf{z}(\alpha_k)=3\,\mathbf{z}(10^{-2})-3\,\mathbf{z}(2*10^{-2})+\mathbf{z}(3*10^{-2})=\begin{pmatrix}0,9947632958\\0,0039164262\\0,9986797221\end{pmatrix}$$

Față de valoarea exactă a pseudosoluției normale $\mathbf{z}^0=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ norma erorii este

$e_z=\|\ \mathbf{z}^0-\mathbf{z}^0_c\ \|=0,00667$ deci nu este îndeplinită condiția ca eroarea să fie mai mică decât 10^{-5}.

Se rezolvă acum sistemul pentru $\alpha_1=10^{-3}$, $\alpha_2=2\ 10^{-3}$, $\alpha_3=3\ 10^{-3}$
Rezultă

Scanned with OKEN Scanner

$$z(10^{-3})=\begin{pmatrix}0,9900196326\\0,007457775\\0,9974774076\end{pmatrix}$$

$$z(2*10^{-3})=\begin{pmatrix}0,9802940752\\0,0147249828\\0,995019058\end{pmatrix}$$

$$z(3*10^{-3})=\begin{pmatrix}0,9708136907\\0,0218088308\\0,9926225215\end{pmatrix}$$

Pseudosoluția normală se află cu (4.130)

$$z^0_c=\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+1}C_3^k\, z(\alpha_k)=3\, z(10^{-3})-3\, z(2*10^{-3})+z(3*10^{-3})=\begin{pmatrix}0,9999903628\\0,0000007207\\0,9999975703\end{pmatrix}$$

Față de valoarea exactă a pseudosoluției normale $z^0=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ norma erorii este

$e_z=\| z^0-z^0_c \|=9,9648*10^{-6}$ şi îndeplineşte condiția de a fi mai mică decât 10^{-5}.

Pentru $\alpha_1=10^{-4}$, $\alpha_2=2\ 10^{-4}$, $\alpha_3=3\ 10^{-4}$ se obține

$$z^0_c=\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+1}C_3^k\, z(\alpha_k)=3\, z(10^{-4})-3\, z(2*10^{-4})+z(3*10^{-4})=\begin{pmatrix}0,9999999896\\0,0000000077\\0,9999999975\end{pmatrix}$$

Rezultă că pentru o valoare a parametrului de regularizare $\alpha_1=10^{-4}$ apropiată de cea calculată ($\alpha_1=7,74\ \ 10^{-5}$) norma erorii este $e_z=\| z^0-z^0_c \|=1,3179\ *10^{-8}$ şi îndeplineşte cu prisosință condiția de a fi mai mică decât 10^{-5}.
S-a văzut de altfel că eroarea îndeplinea condiția cerută chiar pentru valoarea $\alpha_1=10^{-3}$ ceea ce dovedeşte afirmația că valoarea parametrului de regularizare calculată cu formula propusă este mult acoperitoare.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE la capitolul 4

4.1.Tihonov, A.N., Arsenin, V.,I., *Méthodes de résolution de problèmes mal posés,* Edition MIR, Moscou, 1974.

4.2.Micu, Adriana, Micu, D., Pop, V., *Sur les pseudosolutions,* The 6th Conference on Applied Mathematics and Mechanics, pp. 29, Cluj-Napoca, 24-27 sept., 1998.

4.3. Micu, Adriana, Micu, D., Pop, V., *Observations sur les systèmes dégénérés et mal conditionnés d' equations algebriques lineaires,* The 6th Conference on Applied Mathematics and Mechanics, Cluj-Napoca, 24-27 sept., 1998.

4.4.Contract 3003-1994, Tema C 64, *Optimizarea prin sinteza de câmp electromagnetic,* CCSTTII, beneficiar M.I., Cluj-Napoca, 1994.

4.5.Corovei, I., Gavrea, I: Ivan, M. Pop, V. *Matematici speciale. Culegere de probleme.* Lito IPC-N, 1987.

4.6.Micu, D., *Contributions à la synthèse du champ électromagnétique par la méthode de régularisation des systèmes dégénérés,* Revue roumaine des sciences techniques, série E.E, tome 38, vol.2, p.169-179, Bucarest, 1993.

4.7.Bucur, C., Popeea, C.A., Simion, Gh.,Gh., *Matematici speciale. Calcul numeric,* E.D.P. Bucureşti, 1983.

4.8.Micu, Adriana, Micu, D., Patachi, N., *Le nombre de condition,* Revue roumaine des sciences techniques, série E.E, tome 44, vol.2, p.121-134, Bucarest, 1999.

4.9.Ghircoiaşiu, N., *Matematici speciale,* Lito IPC-N., 1976

4.10.Precupanu, A., *Bazele analizei matematice,* Ed. Polirom, Iaşi, 1998.

4.11.Marciuk, G.I., Şaidurov, I.I., *Creşterea preciziei soluţiilor în scheme cu diferenţe,* Editura Academiei, Bucureşti, 1981.

4.12.Iaglom, A.M., Iaglom, I.M. *Probleme neelementare tratate elementar,* Editura tehnică, Bucureşti, 1983.

Scanned with OKEN Scanner

5. CONDIȚIONAREA SISTEMELOR DE ECUAȚII ALGEBRICE LINIARE

5.1 DUBLUL ROL AL CONDIȚIONĂRII SISTEMELOR, ÎN APRECIEREA DEGENERĂRII ȘI ÎN ANALIZA COMPATIBILITĂȚII ELECTROMAGNETICE

În proiectarea dispozitivelor prin sinteză de câmp electromagnetic apar frecvent sisteme de ecuații liniare degenerate, a căror principală caracteristică este caracterul de problemă incorect pusă în sensul că variații mici ale membrului drept, duc la variații mari ale soluției. Trecerea de la sistemele nedegenerate la cele degenerate se face gradat, astfel că se vorbește de sisteme bine condiționate și de sisteme rău condiționate. Condiționarea apare astfel ca o măsură a gradului de degenerare. Evident că este util de știut dacă problema de proiectare este reflectată de un sistem bine condiționat sau rău condiționat, și de asemenea de apreciat apriori măsura relei condiționări.

Un alt aspect al proiectării care apare cu insistență mai ales în anii din urmă este legat de compatibilitatea electromagnetică, definită de Dicționarul Electrotehnic Internațional ca fiind "aptitudinea unui dispozitiv, a unui aparat sau a unui sistem de a funcționa într-un mediu electromagnetic într-o manieră satisfăcătoare și fără să producă el însuși perturbații electromagnetice intolerabile pentru orice obiect care s-ar afla în acest mediu".

Analiza compatibilității electromagnetice a unui dispozitiv înseamnă stabilirea relației dintre cauză (perturbația emisă de către o sursă) și efect (răspunsul dispozitivului agresat) [5.1].

În majoritatea cazurilor, pentru analiza compatibilității este necesar un studiu al răspunsului dispozitivului în condiții normale de funcționare, adică în absența perturbației, apoi un studiu al aceluiași dispozitiv în cazul în care funcționarea lui este perturbată. Compararea celor două răspunsuri, în situația unei imunități cunoscute (impuse) a dispozitivului poate conduce la concluzii privind semnul marjei de compatibilitate [5.2].

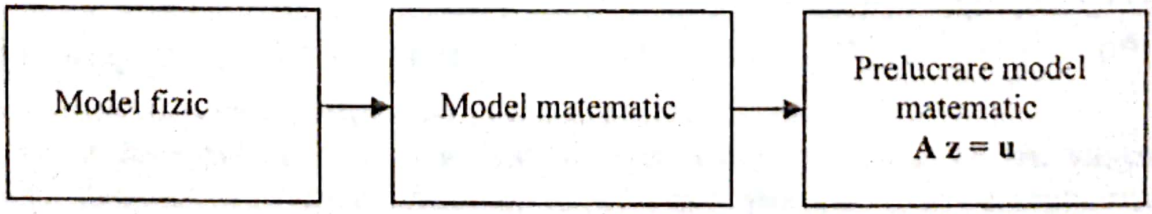


Fig.5.1. Etapele modelării în studiul compatibilității electromagnetice

Scanned with OKEN Scanner

În ipoteza că se urmează această cale, problema studiului compatibilității electromagnetice revine în mare măsură la o problemă de analiză (şi uneori de sinteză) a câmpului electromagnetic. În consecință, modelarea în studiul compatibilității electromagnetice [5.3] se face asemănător cu modelarea în analiza (sinteza) de câmp (Fig.5.1).

Precizăm că analiza câmpului electromagnetic se face la un dispozitiv aflat în funcționare într-un mediu bine determinat unde se cunosc toate sursele de perturbații care pot să-l agreseze.

Sinteza câmpului electromagnetic se face în cazul unui dispozitiv aflat în faza de proiectare, la care se cunosc parțial sursele de perturbații, şi care trebuie să îndeplinească anumite condiții care să-i asigure o imunitate realizată cu mijloace proprii.

Este important de observat că oricare ar fi modelul numeric se ajunge la un sistem liniar de ecuații algebrice.

Vectorul termenilor liberi **u** constituie vectorul "cauză" iar vectorul mărimilor necunoscute **z** este vectorul "efect," matricea de legătură **A** fiind pătrată la problemele de analiză (la problemele de sinteză aceasta poate să nu fie pătrată).

În acest sistem se reflectă acțiunea agresoare a perturbației care poate afecta vectorul cauză sau termenii matricei de legătură. Odată unul din acești factori fiind modificat se va modifica şi vectorul efect.

Este afectată funcționarea dispozitivului de modificarea vectorului efect ? Răspunsul la această întrebare este problema esențială a compatibilității electromagnetice.

Nu orice problemă de compatibilitate se reduce la rezolvarea unui sistem liniar de ecuații algebrice (chiar în schema propusă mai sus se vede că soluționarea analitică este un asemenea exemplu), dar în acest capitol se vor lua în discuție numai acele probleme care se reduc la rezolvarea unui sistem de ecuații liniare.

Se vor prezenta câteva exemple de probleme de compatibilitate electromagnetică (analiză a câmpului electromagnetic) care duc la sisteme de ecuații liniare, exemple grupate în funcție de regimul de variație în timp a mărimilor.

În regim static
a)rețele de condensatoare
b)relațiile lui Maxwell pentru capacități
În regim staționar
a)prize de pământ
b)circuite de curent continuu
c)câmp magnetic staționar
În regim cvasistaționar

Scanned with OKEN Scanner

a)circuite de curent alternativ
b)analiza câmpului electromagnetic
În regim variabil
a)analiza câmpului electromagnetic

Sistemele liniare de ecuaţii au comportări diferite atunci când sunt supuse unor perturbaţii.

Soluţiile unor sisteme sunt instabile faţă de mici variaţii ale datelor iniţiale astfel încât variaţii mici ale membrului drept sau ale coeficienţilor sistemului duc la variaţii oricât de mari ale soluţiei.

Aceasta înseamnă că un nivel mic de perturbaţii poate să ducă uneori la efecte dezastruoase din punctul de vedere al compatibilităţii electromagnetice. Totul depinde deci de imunitatea dispozitivului agresat. În acest context este util să se introducă un număr real şi pozitiv pentru a caracteriza un sistem de ecuaţii. Acest număr este numărul de condiţionare şi el permite să se evalueze stabilitatea sistemului (imunitatea dispozitivului) la perturbaţii.

5.2 BAZELE MATEMATICE ALE NUMĂRULUI DE CONDIŢIONARE

Definirea numărului de condiţionare este legată de norma matriceală. În teoria care urmează vectorii şi matricile au numai componente reale.

5.2.1 NORMA UNUI VECTOR

Prin norma unui vector **z** de componente $z_1, z_2, \ldots z_n$ se înţelege un număr real care satisface condiţiile [5.4]:

i) $\|\mathbf{z}\| \geq 0$, iar $\|\mathbf{z}\| = 0$ dacă şi numai dacă $\mathbf{z} = 0$ (5.1)
ii) $\|\alpha\mathbf{z}\| = |\alpha| \, \|\mathbf{z}\|$, α este un număr complex sau real (5.2)
iii) $\|\mathbf{z} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{z}\| + \|\mathbf{y}\|$ (5.3)

Ultima condiţie este echivalentă cu:

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| \geq | \, \|\mathbf{z}\| - \|\mathbf{y}\| \, | \tag{5.4}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru vectorul **z** considerăm trei norme (normele Hölder [5.5])

$$\|\mathbf{z}\|_p = \left(|z_1|^p + |z_2|^p + \ldots + |z_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, p = 1,2,\infty. \tag{5.5}$$

Pentru p = 1, norma " sumă ":

$$\|\mathbf{z}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |z_i| \tag{5.6}$$

Pentru p = 2, norma euclidiană :

$$\|\mathbf{z}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = (\mathbf{z}^T\mathbf{z})^{\frac{1}{2}} \tag{5.7}$$

Aplicând inegalitatea lui Cauchy

$$|\mathbf{z}^T\mathbf{y}| \le \|\mathbf{z}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \tag{5.8}$$

Pentru p = ∞ avem norma "maxim":

$$\|\mathbf{z}\|_\infty = \max|z_i| \ , i = 1,2,\ldots n \tag{5.9}$$

5.2.2 NORMA UNEI MATRICE

Prin norma unei matrice **A** de ordin m x n se înțelege un număr real ||A|| care satisface condițiile [5.6]:

i) $\|\mathbf{A}\| \ge 0$, iar $\|A\| = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ (5.10)
ii) $\|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha| \, \|\mathbf{A}\|$, α este un număr complex sau real ; (5.11)
iii) $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| \le \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$ (5.12)
iv) $\|\mathbf{A}\,\mathbf{B}\| \le \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{B}\|$ (5.13)

Scanned with OKEN Scanner

A şi **B** sunt matrici pentru care operaţiile corespunzătoare au sens, deci pentru (5.12) cele două matrici au acelaşi ordin şi pentru condiţia (5.13) matricea **A** este de ordin m x n şi matricea **B** este de ordin n x p.

O inegalitate importantă a normelor matricilor **A** şi **B** de acelaşi ordin rezultă aplicând condiţia (5.12):

$$\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\| \geq |\,\|\mathbf{A}\|-\|\mathbf{B}\|\,| \tag{5.14}$$

Un exemplu de normă este norma euclidiană a unei matrice **A** de ordin m x n

$$\|\mathbf{A}\|_E = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.15}$$

Se verifică uşor prin calcul direct :

$$\|\mathbf{A}\|_E^{\,2} = \mathbf{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 \tag{5.16}$$

unde σ_i^2 (i = 1,2,...n) sunt valorile proprii reale şi pozitive ale matricei $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$[5.7]. Matricea $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ are valorile proprii pozitive pentru că este pozitiv semidefinită. S-a demonstrat aceasta la cap.4.3.3.

Valorile pozitive σ_i (i = 1,2,...n) sunt numite valori singulare ale matricei **A** [5.7].

5.2.3 NORMA MATRICIALĂ SUBORDONATĂ NORMEI VECTORIALE

Fie o matrice **A** de ordin m x n şi un vector coloană de ordin n .Definiţia [5.4],[5.5],[5.6] normei matricei subordonate este :

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{z\neq 0}\frac{\|\mathbf{Az}\|}{\|\mathbf{z}\|} \tag{5.17}$$

sau

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\|z\|=1}\|\mathbf{Az}\| \tag{5.18}$$

Din definiţie se deduce :

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{\|Az\|}{\|z\|} \le \sup_{z\neq 0} \frac{\|Az\|}{\|z\|} = \|A\| \tag{5.19}$$

sau

$$\|Az\| \le \|A\|.\|z\| \tag{5.20}$$

Norma vectorului şi norma matricei subordonate care satisfac condiția (5.20) sunt numite: compatibile.

Domeniul $\|z\|= 1$ fiind închis în spațiul R^n şi norma unui vector fiind o funcție continuă față de componentele sale, există $z \neq 0$ astfel încât,[5.4],[5.7]

$$\|Az\|=\|A\| \|z\| \tag{5.21}$$

Aplicând formulei (5.21) definiția (5.17) a normei matricei subordonate normei vectoriale se obține

$$\|A\| = \max_{z\neq 0} \frac{\|Az\|}{\|z\|} \tag{5.22}$$

Fiecare normă vectorială $\|z\|_p$ are o normă a matricei subordonate, $\|A\|_p$

$$\|A\|_1 = \max_{\|z\|_1=1} \|Az\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \tag{5.23}$$

Pentru demonstrație este suficient să se ia o singură componentă

$z_j = 1$ iar celelalte componente nule $z_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots n$; $i \neq j$)

$$\|A\|_\infty = \max_{\|z\|_\infty=1} \|Az\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{5.24}$$

Se ia $|z_i|=1$, ($i = 1, 2,\ldots n$)

Cea mai folosită este norma matricei subordonată normei euclidiene a unui vector (norma spectrală) :

$$\|A\|_2 = \max_{z\neq 0} \frac{\|Az\|_2}{\|z\|_2} \tag{5.25}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci $\|A\|_2$ este norma spectrală iar $\|Az\|_2$, $\|z\|_2$ sunt normele euclidiene ale vectorilor. Cu formula (5.7) se obține :

$$\|A\|_2^2 = \max_{z\neq 0} \frac{\|Az\|_2^2}{\|z\|_2^2} = \max_{z\neq 0} \frac{(Az)^T(Az)}{z^T z} = \max_{z\neq 0} \frac{z^T A^T Az}{z^T z} \tag{5.26}$$

Se consideră

$$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \ldots \geq \sigma_n^2 \geq 0 \tag{5.27}$$

valorile proprii ale matricei $A^T A$ şi (v_1, v_2, ... v_n) un sistem de vectori proprii ortonormați asociați deci

$$A^T A\, v_i = \sigma_i^2 v_i \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{5.28}$$

Se poate scrie

$$z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \tag{5.29}$$

unde α_i sunt numere reale, dintre care unele pot fi nule.

Folosind relațiile (5.27), (5.28) şi (5.29) se poate scrie pătratul normei spectrale sub forma :

$$\|A\|_2^2 = \max_{z\neq 0} \frac{z^T A^T Az}{z^T z} = \max \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2} = \sigma_1^2 \tag{5.30}$$

Maximul este obținut pentru $\alpha_1 \neq 0$; $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Deci norma matricei A subordonată normei vectoriale euclidiene este

$$\|A\|_2 = \sigma_1 > 0 \tag{5.31}$$

Această normă este numită normă spectrală (cea mai mare dintre valorile proprii ale unei matrice, în valoare absolută, este cunoscută sub numele de "rază spectrală").

Deci norma spectrală a unei matrice A este cea mai mare dintre valorile singulare ale matricei A (sau altfel spus rădăcina pătrată pozitivă a celei mai mari valori proprii a matricei $A^T A$).

Scanned with OKEN Scanner

5.2.4 PROPRIETĂȚI ALE NORMEI SPECTRALE

1.Norma spectrală a matricei unitate este :

$$\|\mathbf{I}\|_2 = \max_{z\neq 0} \frac{\|\mathbf{Iz}\|}{\|\mathbf{z}\|} = \frac{\|\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{z}\|} = 1 \tag{5.32}$$

Norma euclidiană a matricei unitate este :

$$\|\mathbf{I}\|_E = \sqrt{n} \tag{5.33}$$

2.Considerăm o matrice **A** de ordin m x n. Avem inegalitatea următoare:

$$\|\mathbf{A}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_E \leq \|\mathbf{A}\|_2 \sqrt{n} \tag{5.34}$$

Folosind formulele (5.31) şi (5.16), inegalitatea (5.34) duce la :

$$\sigma_1 \leq (\sigma_1^{\,2} + \sigma_2^{\,2} + \ldots + \sigma_n^{\,2})^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{n}\,\sigma_1 \tag{5.35}$$

Ținând seama de (5.27) inegalitatea (5.35) este evidentă.

3.Dacă λ este o valoare proprie a matricei pătrate **A** de ordin n atunci

$$|\lambda| \leq \|\mathbf{A}\|_2 \tag{5.36}$$

Fie **z** vectorul propriu care corespunde lui λ

$$\mathbf{A}\,\mathbf{z} = \lambda \mathbf{z} \tag{5.37}$$

Deci

$$|\lambda|\,\|\mathbf{z}\|_2 = \|\lambda\,\mathbf{z}\|_2 = \|\mathbf{Az}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_2 \|\mathbf{z}\|_2 \tag{5.38}$$

Cu (5.31) şi (5.38) se obține :

$$|\lambda| < \sigma_1 \tag{5.39}$$

deci valoarea singulară maximă a matricei **A** este mai mare decât oricare din valorile proprii ale matricei **A**.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă norma spectrală a unei matrice **A** este subunitară atunci toate valorile proprii ale matricei sunt mai mici decât unitatea.

4.Dacă norma spectrală a matricei pătrate **A** de ordin n est subunitară atunci

$$\det(\mathbf{I}+\mathbf{A})\neq 0 \tag{5.40}$$

Într-adevăr, folosind (5.36)

$$\|\lambda_i\|<1, \qquad i=(1,2,...n) \tag{5.41}$$

unde λ_i sunt valorile proprii ale matricei **A**.
Dacă $\det(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})=0$ rezultă $\det[\mathbf{A}+\mathbf{I}-(\lambda_i+1)\mathbf{I}]=0$ deci valorile proprii ale matricei $\mathbf{I}+\mathbf{A}$ sunt λ_i+1, (i=1,2,...n) şi :

$$\det(\mathbf{I}+\mathbf{A})=\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+1)>0 \tag{5.42}$$

5.Dacă norma spectrală a matricei pătrate **A** de ordin n este subunitară atunci

$$\|(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{-1}\|_2\leq(1-\|\mathbf{A}\|_2)^{-1} \tag{5.43}$$

Din $\det(\mathbf{I}+\mathbf{A})\neq 0$ rezultă că $(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{-1}$ există

$$\mathbf{I}=(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I}+\mathbf{A})=(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{-1}+(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A} \tag{5.44}$$

Cu (5.12) şi (5.13) pentru orice normă se poate scrie

$$\|\mathbf{I}\|\geq\|(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{-1}\|-\|(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}\|\geq\|(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{-1}\|-\|(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{-1}\|\,\|\mathbf{A}\| \tag{5.45}$$

Ţinând cont de (5.32) în formula (5.45) rezultă (5.43).

6.Norma spectrală a matricei pătrate $\mathbf{A}^{-1}$ de ordin n este inversa celei mai mici valori singulare a matricei **A**:

$$\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_2=\frac{1}{\sigma_n} \tag{5.46}$$

În virtutea definiţiei (5.31) norma spectrală a matricei $\mathbf{A}^{-1}$ este cea mai mare valoare singulară a matricei $\mathbf{A}^{-1}$ adică rădăcina pătrată pozitivă a celei mai mari valori proprii a matricei $(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}^{-1}$.

Scanned with OKEN Scanner

Dar

$$(A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^{-1} A^{-1} = (A A^T)^{-1} \tag{5.47}$$

Rămâne de demonstrat că $A^T A$ şi $A A^T$ au aceleaşi valori proprii :

$$\det (A^T A - \lambda I) = \det [A^{-1}(AA^T)A - \lambda I] =$$
$$= \det [A^{-1}(AA^T)A - \lambda A^{-1}IA] =$$
$$= \det [A^{-1}(AA^T)A - A^{-1}(\lambda I)A] = \det [A^{-1}(AA^T - \lambda I)A] =$$
$$= \det A^{-1} . \det A . \det (AA^T - \lambda I) = \det (AA^T - \lambda I) \tag{5.48}$$

7.Dacă R este o matrice pătrată ortogonală ($R^T = R^{-1}$) atunci matricile A şi RA au aceeaşi normă spectrală.
Într-adevăr

$$\|RA\|_2^2 = \max_{z \neq 0} \frac{\|RAz\|_2^2}{\|z\|^2} = \max_{z \neq 0} \frac{z^T A^T R^T RAz}{z^T z} = \max_{z \neq 0} \frac{\|Az\|_2^2}{\|z\|_2^2} = \|A\|_2^2 \tag{5.49}$$

Pentru vectori avem în mod asemănător :

$$\|Rz\|_2^2 = (Rz)^T Rz = z^T R^T R z = z^T z = \|z\|_2^2 \tag{5.50}$$

8.Pentru un număr real μ, cu (5.11) avem :

$$\left\|(\mu A)^{-1}\right\|_2 = \left\|\frac{1}{\mu}(A)^{-1}\right\|_2 = \frac{1}{|\mu|}\left\|A^{-1}\right\|_2 \tag{5.51}$$

5.3.NUMĂRUL DE CONDIŢIONARE

Dacă matricea A este nedegenerată, adică

$$\det A \neq 0 \tag{5.52}$$

Scanned with OKEN Scanner

numărul de condiționare se poate defini întotdeauna .

Numărul de condiționare $k(\mathbf{A})$ pentru o matrice pătrată $\mathbf{A}$ de ordin n este produsul dintre norma matricei $\mathbf{A}$ şi norma matricei $\mathbf{A}^{-1}$.[5.4],[5.5].

Considerând norma spectrală rezultă numărul de condiționare spectral

$$k(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2 \, \|\mathbf{A}^{-1}\|_2 \tag{5.53}$$

(Se poate defini câte un număr de condiționare pentru fiecare tip de normă. Astfel numărul de condiționare sumă, calculat pe baza normei matriciale subordonate normei vectoriale sumă este

$$k_1(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_1 \, \|\mathbf{A}^{-1}\|_1$$

iar numărul de condiționare maxim, calculat pe baza normei matriciale subordonate normei vectoriale maxim este

$$k_\infty(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_\infty \, \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty$$

Precizăm că în cele ce urmează în acest capitol prin număr de condiționare vom înțelege numai numărul de condiționare spectral).

Cu (5.31) şi (5.46) avem :

$$k\,(\mathbf{A}) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \tag{5.54}$$

Dacă matricea $\mathbf{A}$ este simetrică, valorile sale singulare sunt valorile absolute ale valorilor sale proprii, deci

$$k(\mathbf{A}) = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|} \tag{5.55}$$

unde ($|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n| > 0$) sunt valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$ luate în valoare absolută.

5.3.1.PROPRIETĂȚI ALE NUMĂRULUI DE CONDIȚIONARE

1.Dacă $\mathbf{R}$ este o matrice ortogonală

$$(\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}) \tag{5.56}$$

atunci matricile pătrate $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{RA}$ au acelaşi număr de condiționare.

Într-adevăr, cu (5.49) şi (5.53), rezultă :

Scanned with OKEN Scanner

$$k(RA) = \|RA\|_2 \cdot \|(R\,A)^{-1}\|_2 = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = k(A) \qquad (5.57)$$

2. Dacă μ este un număr real, atunci matricile pătrate **A** şi μ**A** au acelaşi număr de condiţionare.
Cu (5.11) şi (5.51) avem :

$$k(\mu A) = \|\mu A\|_2 \left\|(\mu A)^{-1}\right\|_2 = |\mu| \|A\|_2 \frac{1}{|\mu|} \left\|A^{-1}\right\|_2 = k(A) \qquad (5.58)$$

3. Numărul de condiţionare este mai mare sau egal cu unitatea.
Într-adevăr, cu (5.13) şi (5.32) avem :

$$k(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 \geq \|AA^{-1}\|_2 = \|I\|_2 = 1 \qquad (5.59)$$

5.3.2.O FORMULĂ APROXIMATIVĂ

Numărul de condiţionare pentru o matrice **A** pătrată de ordinul doi are următoarea expresie aproximativă :

$$k(A)_{apr} = \frac{\|A\|_E^2}{|\det A|} \qquad (5.60)$$

Eroarea $e = k(A)_{apr} - k(A)$ este întotdeauna pozitivă şi mai mică decât 1,5.

Pentru demonstraţie se vor nota cu $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ valorile proprii ale matricei $A^T A$.
Numărul de condiţionare este :

$$k(A) = \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}{\sigma_1^2\,\sigma_2^2} - 2 - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (5.61)$$

Ţinând seama de formula (5.16) :

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \|A\|_E^2 \qquad (5.62)$$

şi de relaţia următoare

Scanned with OKEN Scanner

$$\sigma_1^2 \sigma_2^2 = \det(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = (\det \mathbf{A})^2 \tag{5.63}$$

rezultă

$$k^2(\mathbf{A}) = \frac{\|\mathbf{A}\|_E^4}{(\det \mathbf{A})^2} - 2 - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \tag{5.64}$$

Cu notația din (5.60) se poate calcula eroarea :

$$\varepsilon = k(\mathbf{A})_{apr} - k(\mathbf{A}) = (2 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2})[\, k(\mathbf{A})_{apr} + k(\mathbf{A})]^{-1} < 1,5 \tag{5.65}$$

Această ultimă inegalitate se justifică ținând seama că :

$$\sigma_2^2 \le \sigma_1^2 \tag{5.66}$$

și

$$k(\mathbf{A})_{app} + k(\mathbf{A}) \ge 2 \tag{5.67}$$

Practic se verifică faptul că eroarea este mult mai mică decât cea estimată, oricum (5.60) constituie o foarte bună aproximare.

De exemplu, pentru matricea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 2 & 1,1 \end{bmatrix}$$

avem

$\|\mathbf{A}\|_E^2 = 1 + 0,5^2 + 2^2 + 1,1^2 = 6,46$

$\det \mathbf{A} = 0,1$

$$k(\mathbf{A})_{apr} = \frac{\|\mathbf{A}\|_E^2}{|\det \mathbf{A}|} = 64,60$$

$$k(\mathbf{A}) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} = \sqrt{\frac{6,458491}{0,001548}} = 64,59$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci $\varepsilon = k(A)_{apr} - k(A) = 0{,}01$

Pentru matricea **B**

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 2 & 1{,}01 \end{bmatrix}$$

$\|\mathbf{B}\|_E^2 = 6{,}2701$
$\det \mathbf{B} = 0{,}01$

$$k(\mathbf{B})_{apr} = \frac{6{,}2701}{0{,}01} = 627{,}01$$

$$k(\mathbf{B}) = \sqrt{\frac{6{,}270084}{0{,}0000159}} = 626{,}98$$

$e = 0{,}03$

Cele două exemple dovedesc precizia formulei (5.60) dar de asemenea sugerează că numărul de condiționare este mare dacă valoarea determinantului este mică. Aşadar este de aşteptat ca un sistem cu valoarea determinantului apropiată de zero să fie rău condiționat.

Există însă sisteme care au un număr de condiționare ce poate fi făcut oricât de mare dar a căror determinant nu are o valoare apropiată de zero; de exemplu dacă matricea unui sistem este:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} n & n+1 \\ n-1 & n \end{bmatrix}$$

$\det \mathbf{A} = 1$ dar numărul de condiționare $k(\mathbf{A}) = 4n^2 + 2$ poate fi oricât de mare.

5.4. STUDIUL COMPATIBILITĂȚII ELECTROMAGNETICE CU AJUTORUL NUMĂRULUI DE CONDIȚIONARE

Presupunem că sistemul de ecuații este:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{z} = \mathbf{u} \qquad (5.68)$$

Matricea **A** este pătrată, de ordin n.
Există două tipuri de perturbații: cele care acționează asupra membrului drept, astfel încât termenul **u** devine **u'** şi cele care acționează asupra matricei coeficienților, astfel încât matricea **A** se transformă în **A'**.

Din punct de vedere fizic (fenomenologic) modificarea membrului drept apare atunci când perturbația agresează sursele dispozitivului.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul problemelor de câmp electromagnetic aceste surse pot fi :

a) densităţi de volum de sarcini electrice
b) densităţi superficiale de sarcini electrice
c) densităţi de curent volumice
d) densităţi ale pânzei de curent
e) polarizaţii permanente
f) inducţii remanente.
g) câmpuri imprimate

În cazul problemelor de circuite electrice sursele care pot fi afectate sunt

a) generatoarele (sursele) de tensiune
b) generatoarele de curent.

Fizic, modificări ale matricei coeficienţilor apar atunci când perturbaţia afectează structura dispozitivului (geometria). Elementele componente ale acestei structuri sunt :

a) frontierele domeniului
b) permitivitatea, permeabilitatea, conductivitatea, valori ale elementelor de circuit.

5.4.1 IMUNITATEA SISTEMULUI ÎN CAZUL PERTURBAŢIILOR CARE AFECTEAZĂ SURSELE

La modificarea surselor se modifică termenul drept al sistemului (5.68) care devine **u**'astfel încât soluţia nu va mai fi **z**, ci **z'**. Sistemul afectat de perturbaţii este :

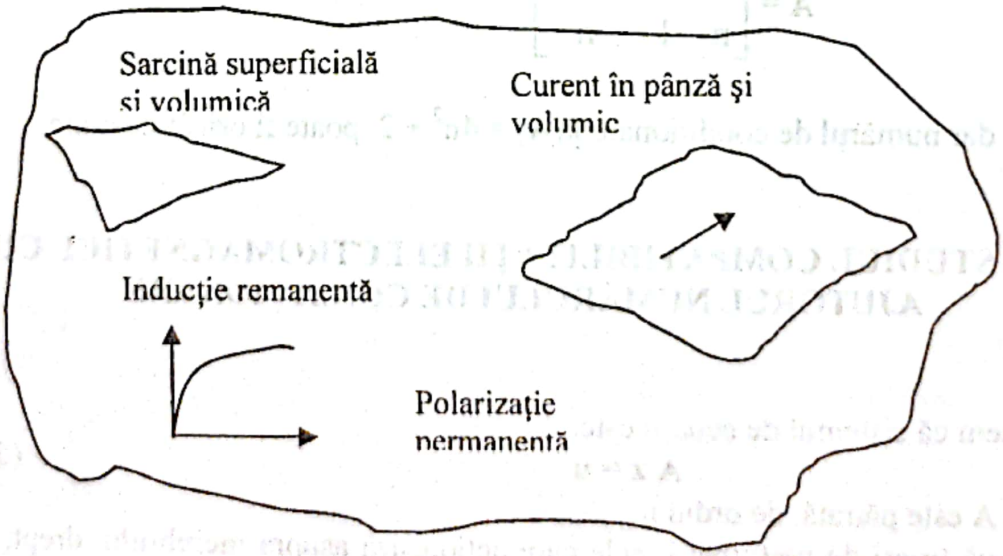


Fig.5.2. Surse de câmp care pot fi afectate de perturbaţii

Scanned with OKEN Scanner

$$\mathbf{A}\,\mathbf{z}' = \mathbf{u}' \tag{5.69}$$

Cu (5.68) şi (5.69) rezultă

$$\mathbf{z}' - \mathbf{z} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}) \tag{5.70}$$

Aplicând aici norma spectrală şi relaţia (5.20), se deduce cu (5.70):

$$\|\mathbf{z}' - \mathbf{z}\|_2 = \|\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{u}' - \mathbf{u})\|_2 \le \|\mathbf{A}^{-1}\|_2 \|\mathbf{u}' - \mathbf{u}\|_2 \tag{5.71}$$

Iar apoi ţinând seama de (5.68)

$$\|\mathbf{A}\|_2 \|\mathbf{z}\|_2 \ge \|\mathbf{A}\,\mathbf{z}\|_2 = \|\mathbf{u}\|_2 \tag{5.72}$$

Cu relaţiile (5.71), (5.72) şi (5.53) se obţine

$$\frac{\|\mathbf{z}'-\mathbf{z}\|_2}{\|\mathbf{z}\|_2} \le \mathrm{k}(\mathbf{A})\,\frac{\|\mathbf{u}'-\mathbf{u}\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2} \tag{5.73}$$

Rezultă de aici că în cazul în care un sistem are un număr de condiţionare mare variaţii mici ale membrului drept pot să ducă la variaţii mari ale soluţiei (sistemul se va numi în acest caz rău condiţionat)[5.8].

De exemplu pentru sistemul

$$\begin{aligned} 3{,}001\, z_1 + 3\, z_2 &= 10 \\ z_1 + z_2 &= 3 \end{aligned} \tag{5.74}$$

numărul de condiţionare este (cu o eroare mai mică decât 1,5):
k = 20.006 (în consecinţă, sistemul este rău condiţionat).

Să presupunem că apar perturbaţii care modifică sursele dispozitivului, dispozitiv care are ca model matematic sistemul (5.74). Membrul drept al sistemului se va modifica, astfel încât sistemul devine :

$$\begin{aligned} 3{,}001\, z_1' + 3 z_2' &= 10{,}1 \\ z_1' + z_2' &= 2{,}7 \end{aligned} \tag{5.75}$$

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul (5.74) are soluțiile z_1= 1000 , z_2= -997 iar sistemul (5.75) are soluțiile z_1'= 2000 z_2'= -1997,3.

Aşadar din cauza numărului de condiționare mare, la o normă de variație a membrului drept de 0,311 rezultă o normă de variație a soluției de 1414.
Este evident că un astfel de sistem are o imunitate mică. Să traducem această constatare într-o relație cantitativă.

Să presupunem că un dispozitiv are un nivel al semnalului util la care corespunde soluția **z**. Presupunem că această mărime este modificată astfel încât ea devine **z'**. Evident că va exista un prag începând de la care se va sesiza că cele două mărimi sunt diferite. Cu cât acest prag este mai mare cu atât mai mari sunt perturbațiile care nu influențează funcționarea dispozitivului deci cu atât mai mare este imunitatea acestui dispozitiv.

Norma variației acestei mărimi soluție calculată pentru valoarea de prag raportată la norma soluției se va numi imunitate, şi se va nota cu I.

O condiție suficientă pentru ca mărimea **z'** să nu fie resimțită ca o mărime perturbată este

$$\frac{\|\mathbf{z}'-\mathbf{z}\|_2}{\|\mathbf{z}\|_2} \le k(\mathbf{A}) \frac{\|\mathbf{u}'-\mathbf{u}\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2} \le I$$

Rezultă de aici posibilitatea de a putea asigura o imunitate mai bună prin micşorarea numărului de condiționare al dispozitivului.

Se observă că un număr de condiționare mai mic permite perturbații mai mari care să fie în marja de compatibilitate.

5.4.2 IMUNITATEA ÎN CAZUL PERTURBAȚIILOR CARE AFECTEAZĂ STRUCTURA DISPOZITIVULUI

Presupunem că în urma unor perturbații structura dispozitivului este afectată.
Rezultă că matricea **A** a sistemului (68) se modifică, astfel încât sistemul nu mai are soluția **z**, ci **z'**:

$$\mathbf{A}' \mathbf{z}' = \mathbf{u} \qquad (5.76)$$

Scanned with OKEN Scanner

$$(\mathbf{A}+\mathbf{P})\mathbf{z}' = \mathbf{u} \tag{5.77}$$

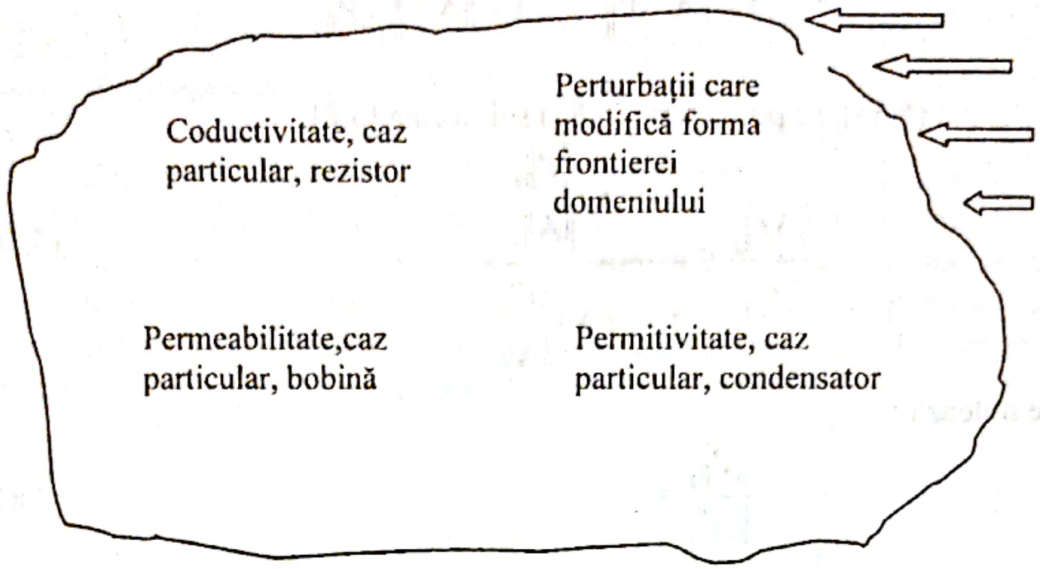


Fig.5.3 Elemente de structură ale unui dispozitiv a căror perturbare poate să ducă la modificarea matricei coeficienților **A**

Presupunem de asemenea că :

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \tag{5.78}$$

dar

$$\det(\mathbf{A}+\mathbf{P}) = \det \mathbf{A}(\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}) = \det \mathbf{A} \det(\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}) \tag{5.79}$$

Condiția

$$\det(\mathbf{A}+\mathbf{P}) \neq 0 \tag{5.80}$$

se obține cu proprietatea 4, subcapitolul 5.2.4:

$$\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}\|_2 \leq 1 \tag{5.81}$$

Presupunem că (5.81) este satisfăcută și notăm :

$$\Delta \mathbf{z} = \mathbf{z}' - \mathbf{z} \tag{5.82}$$

cu relațiile (5.68), (5.77) și (5.82) rezultă :

$$\Delta \mathbf{z} = -(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{P})^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{z} \tag{5.83}$$

Ținând cont de (5.20) se poate scrie

$$\|\Delta \mathbf{z}\|_2 \leq \|(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{P})^{-1}\|_2 \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}\|_2 \|\mathbf{z}\|_2 \tag{5.84}$$

Cu (5.43) și (5.20) :

Scanned with OKEN Scanner

$$\|\Delta z\|_2 \le \frac{\|A^{-1}P\|_2 \|z\|_2}{1-\|A^{-1}P\|_2} \le \frac{\|A^{-1}\|_2 \|P\|_2 \|z\|_2}{1-\|A^{-1}\|_2 \|P\|_2} \qquad (5.85)$$

Folosind (5.53), se poate scrie (5.85) sub forma [5.8]:

$$\frac{\|\Delta z\|_2}{\|z\|_2} \le \frac{\kappa(A)\dfrac{\|P\|_2}{\|A\|_2}}{1-\kappa(A)\dfrac{\|P\|_2}{\|A\|_2}} \qquad (5.86)$$

Se notează :

$$\frac{\|P\|_2}{\|A\|_2} = x \qquad (5.87)$$

Rezultă :

$$\frac{\|z'-z\|_2}{\|z\|_2} \le k(A)\, x\, [1-k(A)\, x]^{-1} = f(x) \qquad (5.88)$$

Pentru perturbații $x = \|P\|_2 / \|A\|_2$ foarte mici, variația funcției f(x) deci și a soluției $\|z' - z\|_2 / \|z\|_2$ este limitată, dar când valoarea $x = \|P\|_2 / \|A\|_2$ se apropie de 1/k(A) sistemul devine rău condiționat (Fig.5.4.)

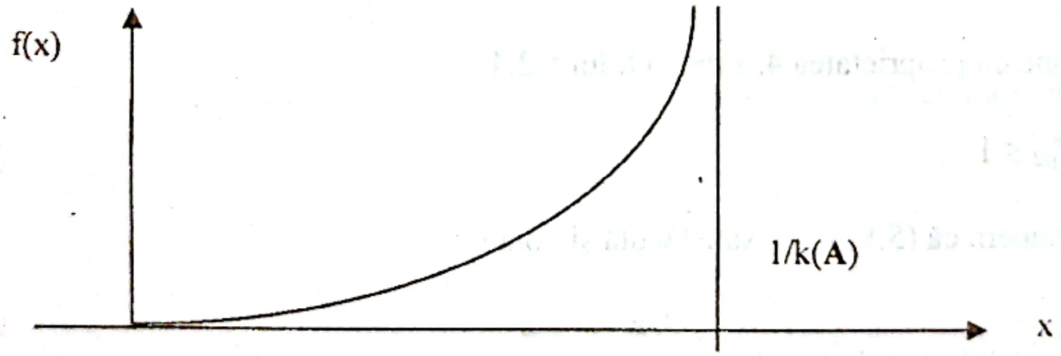


Fig.5.4. Variația funcției f(x)

Dacă k(A) este mare, domeniul în care perturbațiile nu influențează soluția este foarte mic, deci probabilitatea ca sistemul să fie rău condiționat crește.
Pe baza formulei (5.88) se poate stabili o legătură între imunitate, I, și perturbație, P.
Se observă că este suficient ca f(x)<I, pentru ca să avem compatibilitatea electromagnetică asigurată. Aceasta înseamnă că va fi bună din acest punct de vedere numai porțiunea din graficul funcției f(x) care este situată sub dreapta orizontală y=I.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă considerăm două funcţii (Fig.5.5), prima ridicată pentru $k_1(\mathbf{A})$, şi a doua pentru $k_2(\mathbf{A})$ cu $k_1(\mathbf{A}) > k_2(\mathbf{A})$ şi notăm cu x_1 şi x_2 intersecţiile graficelor cu dreapta y=I rezultă că $x_1 < x_2$ ceea ce înseamnă că între perturbaţiile corespunzătoare există relaţia $\|\mathbf{P}_1\| \le \|\mathbf{P}_2\|$.

Domeniul convenabil din punctul de vedere al compatibilităţii este $[0,x_1]$, respectiv $[0,x_2]$.

Evident că este mai bine ca acest domeniu să fie cât mai mare, deci domeniul $[0,x_2]$ este de preferat. Aceasta înseamnă că numărul de condiţionare corespunzător, $k_2(\mathbf{A})$, este mai bun din punctul de vedere al compatibilităţii electromagnetice.

Rezultă un criteriu de a compara două dispozitive din punctul de vedere al imunităţii lor. Un dispozitiv are o imunitate cu atât mai mare la perturbaţii cu cât are un număr de condiţionare mai mic.

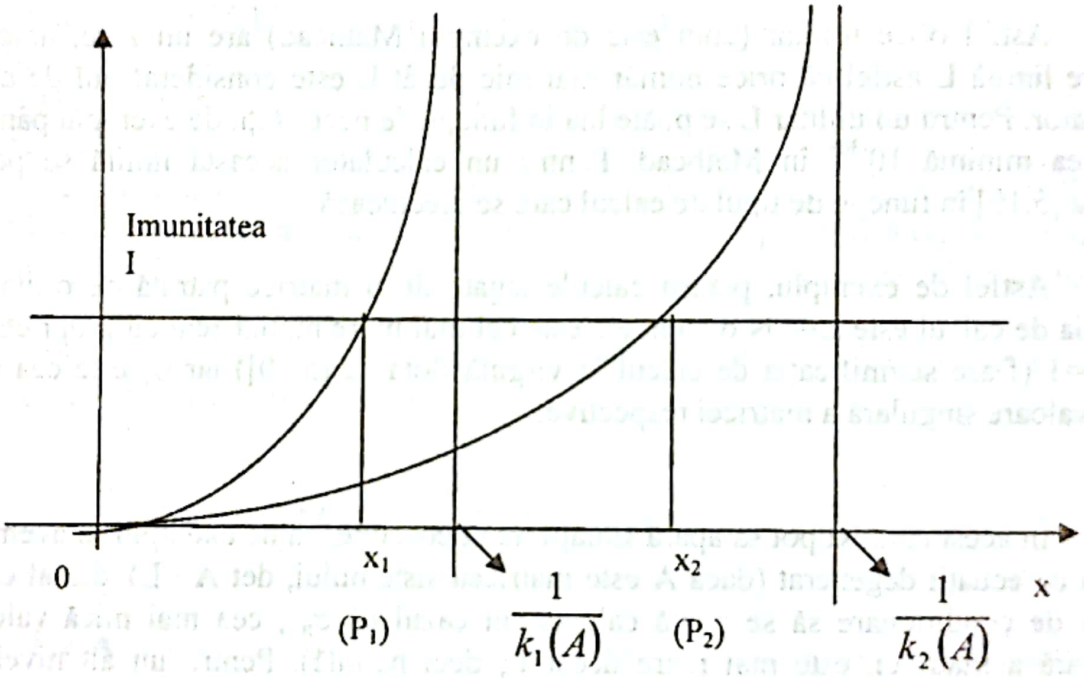


Fig.5.5. Dependenţa imunitate, perturbaţie, număr de condiţionare

Ca exemplu considerăm sistemul (74) ca model matematic al unui dispozitiv şi o perturbaţie care acţionează asupra structurii şi care are ca şi consecinţă modificarea matricei coeficienţilor. Astfel sistemul devine :

$$\begin{aligned} 3{,}001\, z_1' + 3\, z_2' &= 10 \\ 1{,}0003 z_1' + z_2' &= 3 \end{aligned} \qquad (5.89)$$

Norma euclidiană a diferenţei celor două matrici este 0,0003, deci modificarea pare a fi cu totul nesemnificativă

Scanned with OKEN Scanner

Numărul de condiționare pentru sistemul (5.89) este k = 160.078 deci perturbația a făcut ca sistemul modificat (5.89) să fie mai rău condiționat decît sistemul inițial (5.74).

Sistemul (5.89) are soluțiile $z_1' = 10^4$, $z_2' = -10^4$ iar sistemul (5.74) are soluțiile $z_1 = 10^3$, $z_2 = -997$, deci la o diferență între matricea dată și matricea perturbată de normă 0,0003 avem o normă a diferenței între soluții de 12.726.

Calculul numărului de condiționare este important și pentru a putea decide dacă regularizarea este sau nu este necesară [5.9].

Exemplele prezentate în acest capitol (două ecuații cu două necunoscute) nu au necesitat pentru rezolvare utilizarea calculatorului. Problemele practice necesită folosirea calculatorului astfel că se impune o discuție suplimentară asupra preciziei.

Astfel orice utilitar (cum este de exemplu Mathcad) are un zero, adică o valoare limită L astfel că orice număr mai mic decât L este considerat nul de către calculator. Pentru un utilitar L se poate lua în funcție de necesități, de exemplu până la valoarea minimă 10^{-308} în Mathcad. Pentru un calculator această limită se poate calcula [5.10] în funcție de tipul de calcul care se efectuează.

Astfel de exemplu, pentru calcule legate de o matrice pătrată de ordin N, formula de calcul este $L=\varepsilon N \sigma_1^2$ unde ε este cel mai mare număr real cu proprietatea $f(1+\varepsilon)=1$ (f are semnificația de calcul în virgulă flotantă [5.10]) iar σ_1 este cea mai mare valoare singulară a matricei respective.

În acest context pot să apară situații mai deosebite, ca de exemplu să avem un sistem de ecuații degenerat (dacă **A** este matricea sistemului, det **A** <L), dar al cărui număr de condiționare să se poată calcula (în cazul că σ_n , cea mai mică valoare singulară a matricei, este mai mare decât L, deci nenulă). Pentru un alt nivel de precizie al calculatorului sau al utilitarului este posibil ca pentru aceeași problemă calculul numărului de condiționare să nu se poată face.

Scanned with OKEN Scanner

5.5 INTERPRETAREA GEOMETRICĂ A CONDIȚIONĂRII SISTEMELOR DE ECUAȚII ALGEBRICE LINIARE ȘI A COMPATIBILITĂȚII ELECTROMAGNETICE

O problemă de compatibilitate electromagnetică presupune stabilirea modelului fizic apoi alegerea modelului numeric (adică alegerea modelului matematic şi a metodei corespunzătoare de prelucrare) şi în final rezolvarea sistemului de ecuații algebrice liniare

$$\mathbf{A}\,\mathbf{z} = \mathbf{u} \tag{5.90}$$

care poate fi uneori degenerat sau rău condiționat (caz frecvent când se face proiectarea prin sinteză a unui dispozitiv astfel încât să satisfacă nişte condiții de imunitate impuse [5.12], sau alteori compatibil determinat dar în diferite grade de condiționare).

După cum s-a arătat în capitolul anterior numărul de condiționare dă informații asupra acestui grad de condiționare.

Se va considera în acest capitol că vectorul sursă este supus influenței perturbațiilor. În această situație vectorul soluție (efect) poate fi modificat mai mult sau mai puțin în funcție de structura dispozitivului, de stabilitatea lui la perturbații, într-un cuvânt de imunitatea lui.

Inegalitatea lui Wielandt şi Kantorovitch [5.13] dă o informație de natură geometrică asupra imunității dispozitivului.

5.5.1.INEGALITATEA LUI WIELANDT ŞI KANTOROVITCH

Fie **A** o matrice pătrată nedegenerată de ordin n cu coeficienți reali având numărul de condiționare

$$k(\mathbf{A}) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} = k \tag{5.91}$$

unde σ_1 şi σ_n sunt respectiv cea mai mare şi cea mai mică dintre valorile singulare ale matricei **A** ,deci

$$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \ldots \geq \sigma_n^2 \tag{5.92}$$

sunt valorile proprii ale matricei **M**

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^T\mathbf{A} \tag{5.93}$$

Matricea **M** este simetrică, deci

Scanned with OKEN Scanner

$$k(M)=\frac{\sigma_1^2}{\sigma_n^2}=k^2(A)=k^2 \tag{5.94}$$

Fie **x** şi **y** doi vectori ortonormaţi,

$$\mathbf{x}^T=(x_1,x_2,\ldots x_n)\ ;\ \mathbf{y}^T=(y_1,y_2,\ldots y_n)\ ;\ x_i y_i\in R \tag{5.95}$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x}=1 \tag{5.96}$$

$$\mathbf{y}^T\mathbf{y}=1 \tag{5.97}$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y}=0$$

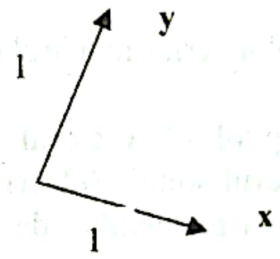


Fig.5.6. **x** şi **y** doi vectori ortonormaţi

Vom nota cu **G** matricea pătrată

$$\mathbf{G}=(\mathbf{x},\mathbf{y})^T\,\mathbf{M}\,(\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{5.98}$$

şi cu φ unghiul dintre vectorii **Ax** şi **Ay** .

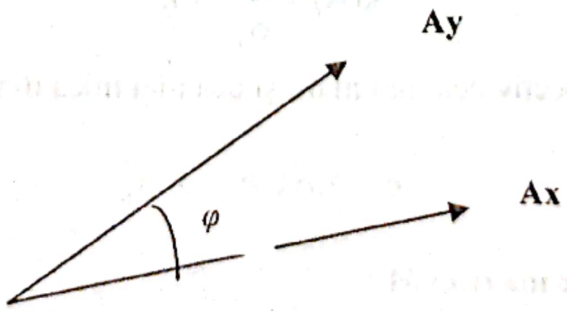


Fig.5.7. Vectorii **Ax** şi **Ay** formează un unghi φ

Scanned with OKEN Scanner

Este important să observăm că :

$$g_{11}=\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x}=\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=(\mathbf{A}\mathbf{x})^T\mathbf{A}\mathbf{x}=\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \tag{5.99}$$

$$g_{12}=\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{y}=(\mathbf{A}\mathbf{x})^T\mathbf{A}\mathbf{y}==\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2\,\|\mathbf{A}\mathbf{y}\|_2\cos\varphi \tag{5.100}$$

$$g_{21}=\mathbf{y}^T\mathbf{M}\mathbf{x}=(\mathbf{A}\mathbf{y})^T\mathbf{A}\mathbf{x}=\|\mathbf{A}\mathbf{y}\|_2\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2\cos\varphi \tag{5.101}$$

$$g_{22}=\|\mathbf{A}\mathbf{y}\|_2^2 \tag{5.102}$$

Deci

$$g_{12}=g_{21} \tag{5.103}$$

Se vede uşor din (5.99)-(5.102) :

$$\det\mathbf{G}=\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2\,\|\mathbf{A}\mathbf{y}\|_2^2(1-\cos^2\varphi)\geq 0 \tag{5.104}$$

Valorile proprii ale matricei **G** sunt

$$\gamma_1 \geq \gamma_2 \tag{5.105}$$

Deci [5.13]:

$$\sigma_1^2 \geq \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \sigma_n^2 \tag{5.106}$$

şi

$$\det\mathbf{G}=\gamma_1\,\gamma_2 \tag{5.107}$$

De asemenea

$$g_{11}+g_{22}=\gamma_1+\gamma_2 \tag{5.108}$$

Considerăm expresia:

$$E=1-\frac{\left(\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{y}\right)^2}{\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x}\mathbf{y}^T\mathbf{M}\mathbf{y}} \tag{5.109}$$

Cu (5.99)-(5.102) expresia se scrie:

$$E=\frac{g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}}{g_{11}g_{22}}=\frac{4\det G}{(g_{11}+g_{22})^2-(g_{11}-g_{22})^2} \tag{5.110}$$

şi ţinând cont de (5.107) şi (5.108)

$$E=\frac{4\gamma_1\gamma_2}{(\gamma_1+\gamma_2)^2-(g_{11}-g_{22})^2} \tag{5.111}$$

Rezultă că expresia lui E este minimă pentru

Scanned with OKEN Scanner

$$g_{11} = g_{22} \tag{5.112}$$

Sau

$$\|\mathbf{Ax}\|_2 = \|\mathbf{Ay}\|_2 \tag{5.113}$$

Deci

$$\frac{\left(\mathbf{x}^T\mathbf{My}\right)^2}{\mathbf{x}^T\mathbf{Mxy}^T\mathbf{My}} \le 1 - \frac{4\gamma_1\gamma_2}{(\gamma_1+\gamma_2)^2} = \left(\frac{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}-1}{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}+1}\right)^2 = f\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) \tag{5.114}$$

Pentru γ_1/γ_2 supraunitar $f(\gamma_1/\gamma_2)$ este o funcție crescătoare, deci ea este maximă pentru γ_1/γ_2 maxim, astfel încât cu relația (5.106) avem:

$$f(\gamma_1/\gamma_2) \le f(\sigma_1^2/\sigma_n^2) = f(k^2) \tag{5.115}$$

Cu (5.114) și (5.115) rezultă

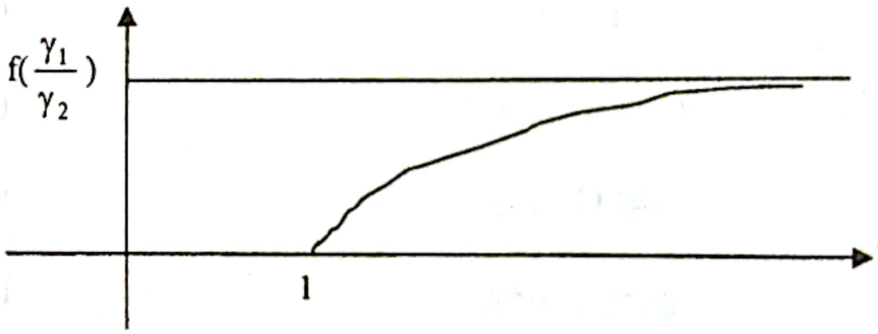


Fig.5.8. Funcția $f(\gamma_1/\gamma_2)$ este o funcție crescătoare

$$\frac{\left(\mathbf{x}^T\mathbf{My}\right)^2}{\mathbf{x}^T\mathbf{Mxy}^T\mathbf{My}} \le \left(\frac{k-k^{-1}}{k+k^{-1}}\right)^2 \tag{5.116}$$

Notând

$$k = \operatorname{ctg}\theta/2\,, \quad \theta\in(0,\pi/2] \tag{5.117}$$

și ținând cont pentru membrul stâng de (5.99)-(5.102) și pentru membrul drept de (5.117), relația (5.116) se pune sub forma :

$$\cos^2\varphi \le \cos^2\theta \tag{5.118}$$

sau

Scanned with OKEN Scanner

$$\varphi \geq \theta \tag{5.119}$$

Sau încă

$$\varphi \geq 2 \operatorname{arcctg} k \tag{5.120}$$

OBSERVAŢII

1)Unghiul minim între transformatele **Ax** şi **Ay** a doi vectori ortonormaţi **x** şi **y** este 2 arcctg k. În Fig.5.9. s-a făcut o interpretare geometrică a formulei (5.120). Se observă că dacă presupunem că cercul desenat este cercul cu raza unitate, segmentului de lungime egală cu k luat pe tangenta la cerc îi corespunde exact unghiul θ/2.

Rezultă apoi, prin dublarea acestui unghi, θ .

Formula (5.120) arată că unghiul φ între vectorii **Ax** şi **Ay** nu poate fi decât mai mare decât θ, adică dacă una din laturile unghiului este axa absciselor, atunci cealaltă latură va fi în sectorul de cerc delimitat de θ şi π/2.

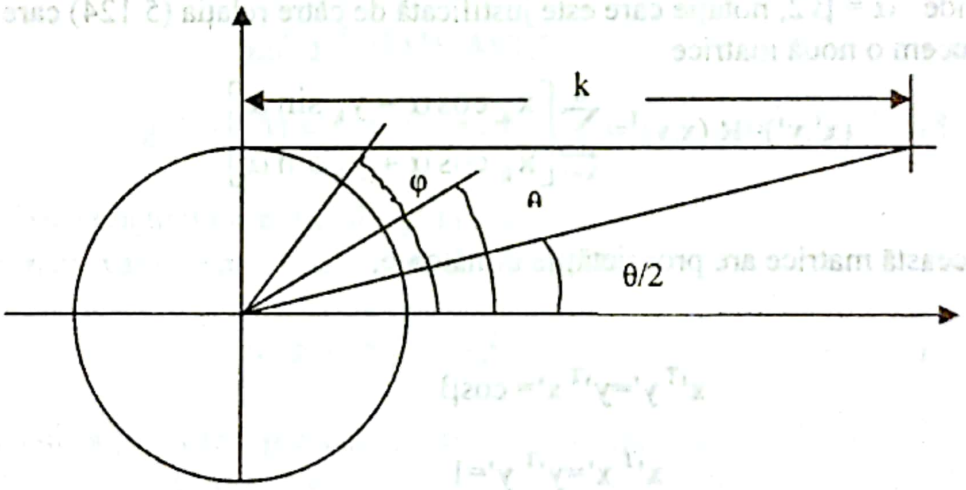


Fig.5.9. Exemplificarea geometrică a formulei (5.120)

2)Dacă numărul de condiţionare k creşte, unghiul θ devine mai mic, deci unghiul φ între **Ax** şi **Ay** are o valoare minimă mai mică, ceea ce apare foarte sugestiv din Fig.5.9.

3)Cu (5.113),(5.114),(5.95) şi (5.96) se poate scrie:

$$\|\mathbf{Ax}-\mathbf{Ay}\|_2 / \|\mathbf{Ax}\|_2 \geq 2(k^2+1)^{-1/2} \tag{5.121}$$

Scanned with OKEN Scanner

inegalitate care nu este mai precisă decât cea pe care am întâlnit-o în cazul general al perturbațiilor care modifică membrul drept [5.13], cu condițiile suplimentare (5.95) și (5.96).

4)Dacă condiția (5.113) nu este satisfăcută, putem presupune că diferența între cei doi termeni ai inegalității (5.120) va fi mai mare.

Ortogonalitatea lui **x** și **y** limitează interpretarea inegalității (5.120).Acesta este motivul pentru care se va căuta o formă mai generală.

Forma finală a inegalității lui Wielandt și Kantorovitch.

Considerăm matricea

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix} \tag{5.122}$$

unde $\alpha = \beta/2$, notație care este justificată de către relația (5.124) care urmează, și introducem o nouă matrice

$$(\mathbf{x}',\mathbf{y}')=\mathbf{R}\,(\mathbf{x},\mathbf{y})^{T}=\sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix}x_k\cos\alpha-y_k\sin\alpha\\ x_k\cos\alpha+y_k\sin\alpha\end{bmatrix} \tag{5.123}$$

Această matrice are proprietățile următoare;

$$\mathbf{x}'^{T}\mathbf{y}'=\mathbf{y}'^{T}\mathbf{x}'=\cos\beta \tag{5.124}$$

$$\mathbf{x}'^{T}\mathbf{x}'=\mathbf{y}'^{T}\mathbf{y}'=1 \tag{5.125}$$

Pentru a dovedi aceste relații se va face un calcul direct ținând seama de (5.123),(5.95),(5.96) și (5.97):

$$\mathbf{x}'^{T}\mathbf{y}'=\mathbf{y}'^{T}\mathbf{x}'=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos\beta \tag{5.126}$$

$$\mathbf{x}'^{T}\mathbf{x}'=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \tag{5.127}$$

La fel se demonstrează că $\mathbf{y}'^{T}\mathbf{y}'=1$.

Din (5.124) și (5.125) se deduce că **x'** și **y'** sunt doi vectori de modul unitate formând un unghi β în R^n.

Scanned with OKEN Scanner

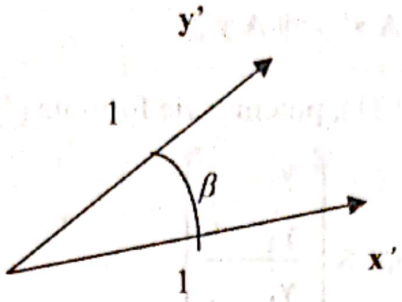


Fig.5.10. $\mathbf{x}'$ şi $\mathbf{y}'$ doi vectori normaţi formând un unghi

Considerăm matricea

$$\mathbf{G}'=(\mathbf{x}',\mathbf{y}')^T\,\mathbf{M}\,(\mathbf{x}',\mathbf{y}') \tag{5.128}$$

Putem scrie

$$g_{11}'=\mathbf{x}'^T\,\mathbf{M}\,\mathbf{x}'=\|\mathbf{A}\mathbf{x}'\|_2^2 \tag{5.129}$$

$$g_{22}'=\mathbf{y}'^T\,\mathbf{M}\,\mathbf{y}'=\|\mathbf{A}\mathbf{y}'\|_2^2 \tag{5.130}$$

$$g_{12}'=\mathbf{x}'^T\,\mathbf{M}\,\mathbf{y}'=\|\mathbf{A}\mathbf{x}'\|_2\|\mathbf{A}\mathbf{y}'\|_2\cos\varphi'=g_{21}' \tag{5.131}$$

unde φ' este unghiul între $\mathbf{Ax}'$ şi $\mathbf{Ay}'$ în spaţiul R^n.
Notăm γ_1',γ_2' valorile proprii ale matricei $\mathbf{G}'$, deci

$$\sigma_1^2 \geq \gamma_1' \geq \gamma_2' \geq \sigma_n^2 \tag{5.132}$$

Procedând ca şi în cazul precedent considerând expresia

$$E' = 1-\frac{\left(\mathbf{x}'^T\mathbf{M}\mathbf{y}'\right)^2}{\mathbf{x}'^T\mathbf{M}\mathbf{x}'\,\mathbf{y}'^T\mathbf{M}\mathbf{y}'}=\frac{4\gamma_1'\gamma_2'}{(\gamma_1'+\gamma_2')^2-(g_{11}'-g_{22}')^2} \tag{5.133}$$

Se deduce :

$$\frac{\left(\mathbf{x}'^T\mathbf{M}\mathbf{y}'\right)^2}{\mathbf{x}'^T\mathbf{M}\mathbf{x}'\,\mathbf{y}'^T\mathbf{M}\mathbf{y}'}\leq 1-\frac{4\gamma_1'\gamma_2'}{(\gamma_1'+\gamma_2')^2} \tag{5.134}$$

Avem egalitate în (5.134) dacă

Scanned with OKEN Scanner

$$g_{11}' = g_{22}' \tag{5.135}$$

adică dacă

$$\| \mathbf{A}\, \mathbf{x}' \|_2 = \| \mathbf{A}\, \mathbf{y}' \|_2 \tag{5.136}$$

Ţinând cont de (5.129)-(5.131), putem scrie formula (5.134) sub forma

$$\cos^2 \varphi' \le \left(\frac{\frac{\gamma_1'}{\gamma_2'} - 1}{\frac{\gamma_1'}{\gamma_2'} + 1} \right)^2 \tag{5.137}$$

Vom arăta că

$$\gamma_1' = 2\, \gamma_1 \cos^2 \beta/2 \tag{5.138}$$

$$\gamma_2' = 2\, \gamma_2 \sin^2 \beta/2 \tag{5.139}$$

Ţinând cont de (5.123) şi (5.128) rezultă

$$\mathbf{G}' = \mathbf{R}\, \mathbf{G}\, \mathbf{R}^T$$

$$\begin{aligned} g_{11}' &= g_{11} \cos^2 \alpha - g_{21} \sin \alpha \cos \alpha - g_{12} \sin \alpha \cos \alpha + g_{22} \sin^2 \alpha \\ g_{12}' &= g_{21}' = g_{11} \cos^2 \alpha - g_{22} \sin^2 \alpha \\ g_{22}' &= g_{11} \cos^2 \alpha + g_{22} \sin^2 \alpha + 2 g_{12} \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \tag{5.140}$$

Condiţia $g_{11}' = g_{22}'$ este echivalentă cu

$$g_{12} = g_{21} = 0 \tag{5.141}$$

deci $\gamma_1 \gamma_2 = g_{11} g_{22}$ şi $\gamma_1 + \gamma_2 = g_{11} + g_{22}$ de unde

$$g_{11} = \gamma_1 \tag{5.142}$$

$$g_{22} = \gamma_2 \tag{5.143}$$

Din (5.140) se deduce :

$$\det \mathbf{G}' = 4 \det \mathbf{G} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \tag{5.144}$$

sau

$$\gamma_1' \gamma_2' = 4\, \gamma_1 \gamma_2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \tag{5.145}$$

Utilizând faptul că suma valorilor proprii ale unei matrice **G'** este egală cu "urma" matricei **G'** :

$$\gamma_1' + \gamma_2' = \text{trace}\, \mathbf{G}' = 2\gamma_1 \cos^2 \alpha + 2\gamma_2 \sin^2 \alpha \tag{5.146}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (5.145) şi (5.146) rezultă (5.138) şi (5.139) ,q.e.d.

Revenim la relaţia (5.137) şi cu formulele (5.138) şi (5.139):

$$\cos^2\varphi' \le \frac{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}-1}{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}+1} \le \frac{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}-1}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}+1} = \frac{k^2\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}-1}{k^2\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}+1} \qquad (5.147)$$

După câteva transformări elementare avem inegalitatea [5.4],[5.13]

$$\operatorname{ctg}\frac{\varphi'}{2} \le k\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \qquad (5.148)$$

sau

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \le k\operatorname{tg}\frac{\varphi'}{2} \qquad (5.149)$$

$$\beta \le 2\operatorname{arctg}(k\operatorname{tg}\frac{\varphi'}{2}) \qquad (5.150)$$

(5.148),(5.149) şi (5.150) sunt forme echivalente ale inegalităţii lui Wielandt şi Kantorovitch .

Pornind de la inegalitatea demonstrată se pot face unele remarci cu caracter de corolar :

Presupunem că termenul drept al unei ecuaţii **A z = u** este supus unei perturbaţii astfel încît membrul secund devine **u'** şi deci soluţia nu va mai fi **z** ci **z'**.

Unghiul dintre **u** şi **u'** este φ' şi numărul de condiţionare al matricei **A** este k . Cu aceste condiţii unghiul maxim între soluţiile **z** şi **z'** este

$$\beta_{max} = 2\operatorname{arctg}(k\operatorname{tg}\varphi'/2)$$

Perturbaţiile membrului secund pot fi produse din motive prezentate pe larg în bibliografia de specialitate având ca şi caracteristică comună faptul că au ca obiect sursele dispozitivului agresat.

Scanned with OKEN Scanner

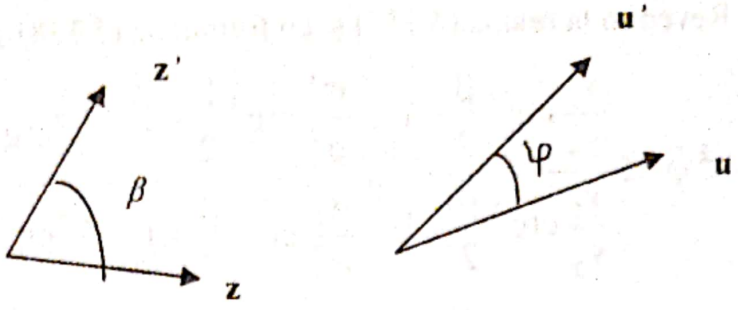


Fig.5.11. Unghiurile dintre vectorii cauză şi vectorii efect

O altă formă a inegalității utilă în aplicații se poate obține pornind de la (5.149) şi exprimând tg φ'/2 în funcție de **u** şi **u'** :

$$tg^2\,\beta/2 \le k^2\,(\|\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{u}'\|_2-\mathbf{u}^T\mathbf{u}')(\|\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{u}'\|_2+\mathbf{u}^T\mathbf{u}')^{-1} \qquad (5.151)$$

5.5.2 COMPARAREA A DOUĂ DISPOZITIVE SUPUSE ACELEEAŞI PERTURBAȚII

Se vor considera două dispozitive având ca model numeric un sistem de ecuații algebrice liniare.

Pentru a putea verifica cu uşurință rezultatele se va lua un sistem de două ecuații cu două necunoscute.

Se vor lua în discuție cele două dispozitive prin sistemele de ecuații care le caracterizează :

a) un sistem cu numărul de condiționare k =64,59

b) un sistem cu numărul de condiționare k =626,98

a) Fie sistemul

$$\begin{aligned} z_1 + 0{,}5\,z_2 &= 10 \\ 2z_1 + 1{,}1\,z_2 &= 21 \end{aligned} \qquad (5.152)$$

Numărul de condiționare al sistemului este

$$k = (\sigma_1^2/\sigma_2^2)^{0,5} = (6{,}458491 / 0{,}001548)^{0,5} = 64{,}59 \qquad (5.153)$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluţia sistemului este $z_1 = 5$, $z_2 = 10$

Presupunem că membrul secund este perturbat astfel încât sistemul (5.152) devine :

$$z_1' + 0{,}5\, z_2' = 10$$
$$2z_1' + 1{,}1\, z_2' = 20{,}9 \qquad (5.154)$$

(observăm că perturbaţia a făcut ca membrul secund al celei de-a doua ecuaţii să fie micşorat cu 0,1)

Soluţia sistemului (5.154) este $z_1' = 5{,}5$; $z_2' = 9$ deci ea nu este foarte diferită de soluţia sistemului (5.152). Aceasta se explică prin faptul că sistemul are o imunitate bună, având un număr de condiţionare mic, respectiv sistemul corespunzător dispozitivului fiind bine condiţionat.

Unghiul φ' calculat cu ajutorul vectorilor din membrul drept al sistemelor (5.152) şi (5.154) este

$$\varphi' = 6{,}374' \text{ (minute)} \qquad (5.155)$$

Cu inegalitatea (5.149) avem

$$\operatorname{tg} \beta/2 \le 0{,}0599 \qquad (5.156)$$

şi

$$\beta \le 6^\circ\, 56' \text{ (6 grade , 56 minute)} \qquad (5.157)$$

Unghiul β calculat între cele două soluţii este

$$\beta = 2^\circ\, 25' \qquad (5.158)$$

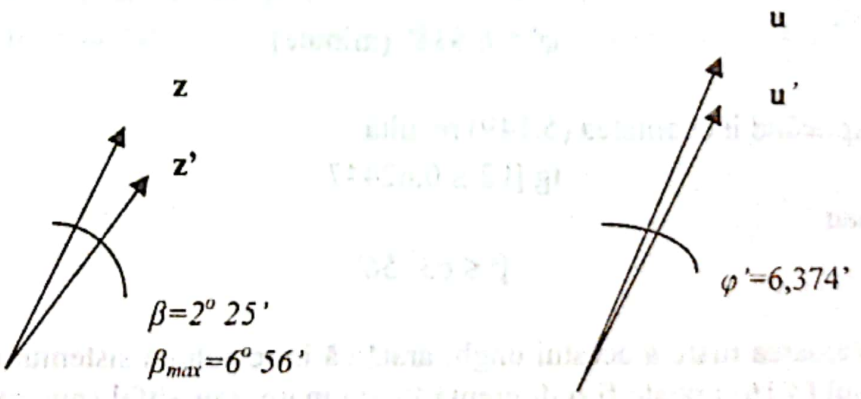


Fig.5.12. Sistem bine condiţionat, cu k=64,59

Observăm că inegalitatea (5.157) este verificată de către valoarea calculată (5.158).

Scanned with OKEN Scanner

Mai mult, există o diferență semnificativă între valoarea reală, calculată, și valoarea maximă care rezultă din inegalitatea lui Wielandt și Kantorovitch.

b)Considerăm acum sistemul ce corespunde celui de-al doilea dispozitiv

$$\begin{aligned} z_1 + 0{,}5\, z_2 &= 10 \\ 2z_1 + 1{,}01 z_2 &= 20{,}1 \end{aligned} \tag{5.159}$$

al cărui număr de condiționare este :

$$k = (\sigma_1^2/\sigma_2^2)^{0,5} = (\,6{,}270084 / 0{,}0000159\,) = 626{,}98 \tag{5.160}$$

Soluția este aceeași cu cea a sistemului (5.152), $z_1 = 5$; $z_2 = 10$

Presupunem că asupra dispozitivului acționează o perturbație identică cu cea din exemplul precedent, astfel încât membrul drept din cea de-a doua ecuație a sistemului (5.159) se va micșora cu 0,1.

Sistemul (5.159) devine :

$$\begin{aligned} z_1' + 0{,}5 z_2' &= 10 \\ 2z_1' + 1{,}01 z_2' &= 20 \end{aligned} \tag{5.161}$$

și are ca soluție $z_1' = 10$; $z_2' = 0$ care este de această dată cu mult diferită de soluția sistemului (5.159).

Aceasta se explică prin imunitatea mult mai mică a acestui de-al doilea dispozitiv. Imunitatea mică este consecința numărului de condiționare mare al matricei, de unde și caracterul rău condiționat al sistemului (5.159).

Se observă că numărul de condiționare al sistemului (5.159) este de aproape zece ori mai mare decât cel al sistemului (5.152).

Unghiul φ' format de către vectorii din membrul secund al sistemelor (5.159) și (5.161) este apropiat celui făcut de către vectorii corespunzători din exemplul a).

Aceasta se explică prin faptul că am făcut aceleași modificări asupra unor termeni foarte apropiați din membrul drept al sistemelor.

$$\varphi' = 6{,}838' \text{ (minute)} \tag{5.162}$$

Aplicând inegalitatea (5.149) rezultă

$$\operatorname{tg} \beta/2 \le 0{,}62447 \tag{5.163}$$

Sau

$$\beta \le 63^\circ\, 56' \tag{5.164}$$

Valoarea mare a acestui unghi arată că între soluția sistemului (5.159) și cea a sistemului (5.161) poate fi o diferență foarte mare, sau altfel spus că sistemul (5.159) este rău condiționat.

Calculul direct al unghiului dintre soluțiile **z** și **z'** dă valoarea

$$\beta = 63^\circ\, 30' \tag{5.165}$$

care satisface inegalitatea (5.164) și este foarte apropiată de valoarea maximă precizată de Wielandt și Kantorovitch.

Scanned with OKEN Scanner

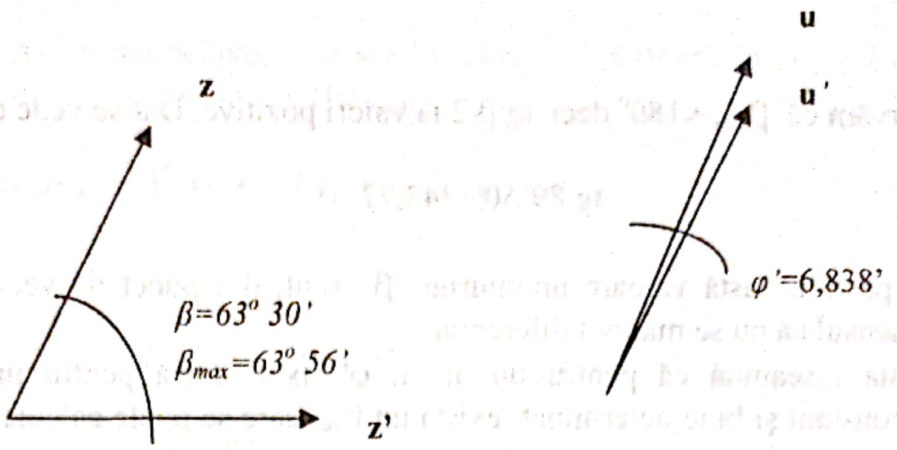


Fig.5.13. Sistem rău condiționat, cu k=626,98

Sistemele (5.152),(5.154),(5.159) şi (5.1610) au soluții exacte astfel că nu mai este necesară o discuție asupra preciziei calculatorului sau a utilitarului. Valorile proprii au fost calculate cu o precizie de 10^{-6} iar creşterea acestei precizii nu va aduce modificări ale valorii numărului de condiționare. Cele două exemple subliniază un fapt important :

Cu cât un sistem este mai rău condiționat, unghiul format de vectorul reprezentând soluția inițială cu cel care reprezintă soluția perturbată va fi mai mare şi mai apropiat de valoarea maximă dată de inegalitatea lui Wielandt şi Kantorovitch.

Să observăm că condițiile (5.125) şi de asemenea (5.95) şi (5.96) nu sunt restrictive. Într-adevăr, inegalitatea lui Wielandt şi Kantorovitch are aceeaşi expresie pentru ecuațiile $\mathbf{Az=u}$; $\mathbf{Az'=u'}$ sau pentru ecuațiile $\mathbf{A\,z/\|z\|_2 = u/\|z\|_2}$; $\mathbf{A\,z'/\|z'\|_2 = u'/\|z'\|_2}$ Aşadar "normalizarea" nu influențează unghiul (a se vedea (5.151)).

Scanned with OKEN Scanner

5.5.3 PROPRIETATEA DE SATURAȚIE A PERTURBAȚIEI

Observăm că $\beta_{max} < 180^o$ deci tg $\beta/2$ ia valori pozitive. Dar se vede că

$$\text{tg } 89^o50' = 343,77 \qquad (5.166)$$

Deci peste această valoare unghiurile β sunt, din punct de vedere practic, aceleaşi, în sensul că nu se mai pot diferenția.

Aceasta înseamnă că pentru un unghi φ' fixat, adică pentru un nivel de perturbație constant şi bine determinat, există un k_{min} care se poate calcula cu (5.149) şi (5.166).

Pentru $k \geq k_{min}$ sistemele au practic acelaşi comportament în ceea ce priveşte unghiul dintre soluții.

Astfel pentru sistemul de la exemplul (a din subcapitolul anterior rezultă $k_{min}=3,7051\ 10^5$, iar pentru sistemul de la exemplul (b se află prin calcul $k_{min}=3,4916\ 10^5$.

O a doua abordare a aceleiaşi probleme este posibilă dacă se consideră un dispozitiv având ca model matematic un sistem de ecuații cu un număr de condiționare bine determinat de valoare k.

Presupunem că valoarea k nu se mai modifică, deci că structura dispozitivului este fixă.

Dacă notăm cu φ_{max} valoarea unghiului care are proprietatea că

$$\text{tg } (\varphi_{max}/2) = 343,77/k,$$

atunci se observă că orice unghi mai mare decât φ_{max} are acelaşi efect. Aceasta înseamnă că există o perturbație maximă care are un efect ce nu mai poate fi depăşit, oricât de mult ar creşte nivelul perturbației.

Această perturbație maximă se poate calcula cu (5.149) şi (5.166), precum şi cu informații suplimentare tipice fiecărei probleme în parte.

5.5.4 EFECTUL DISTRUCTIV MAXIM AL UNEI PERTURBAȚII DATE

Pentru k şi φ' date, cunoscute, se poate găsi acel β care implică cea mai rea condiționare a sistemului, adică chiar β maxim având valoarea :

$$\beta = 2 \text{ arctg}(k \text{ tg } \varphi'/2) \qquad (5.167)$$

În acest caz există o diferență între soluțiile **z** şi **z'** deci

Scanned with OKEN Scanner

$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots z_n)^T$ şi $\mathbf{z}' = (z_1+\varepsilon_1, z_2+\varepsilon_2, \ldots z_n+\varepsilon_n)^T$

Situaţia cea mai defavorabilă are loc atunci când diferenţa dintre **z** şi **z'** există datorită unei singure componente (fie z_1):

$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots z_n)^T$ şi $\mathbf{z}' = (z_1+\varepsilon, z_2, \ldots z_n)^T$

Pornind de la

$$tg^2 \beta/2 = (\|\mathbf{z}\|_2\|\mathbf{z}'\|_2 - \mathbf{z}^T\mathbf{z}')(\|\mathbf{z}\|_2\|\mathbf{z}'\|_2 + \mathbf{z}^T\mathbf{z}')^{-1} \quad (5.168)$$

după câteva calcule se poate afla expresia

$$\varepsilon = \|\mathbf{z}\|_2^2 [0{,}5 (\|\mathbf{z}\|_2^2 - z_1^2)^{0,5} (K^{-1} ctg\, \varphi'/2 - K\, tg\, \varphi'/2) - z_1]^{-1} \quad (5.169)$$

Considerăm că această formulă este importantă prin faptul că permite evaluarea riscului maxim (a erorii maxime) pe care o poate genera o perturbaţie dată, asupra unui dispozitiv cu structură fixă (k dat, fixat).

Ca exemplu vom considera sistemele prezentate anterior, sistemul a) şi sistemul b).

Pentru sistemul a) folosind (5.169) rezultă eroarea maximă

$\varepsilon = 1{,}599018$

Calculul direct ne duce la concluzia (pe care noi deja o ştim) că ambele componente sunt afectate de erori, iar acestea sunt $\varepsilon_1=0{,}5$; $\varepsilon_2=-1$. Să remarcăm că nici una din aceste două erori nu depăşeşte eroarea maximă dată de (5.169).

Să ne amintim că acest sistem era bine condiţionat şi să remarcăm că erorile reale, efectiv calculate, sunt relativ apropiate de eroarea maximă dată de formulă.

Pentru sistemul b) rezultă cu formula (5.169)

$\varepsilon = -1081{,}31$

iar calculul direct dă de asemenea două erori $\varepsilon_1=5$; $\varepsilon_2=-10$.

Să observăm cât de mare este diferenţa dintre erorile reale, efectiv calculate, şi maximul posibil al erorii în cazul sistemului b), care este rău condiţionat

Cele două exemple justifică formula (5.169) dar în acelaşi timp subliniază influenţa numărului de condiţionare, deci a imunităţii dispozitivului, asupra nivelului erorii maxime.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE la capitolul 5

5.1.Tesche, F.M., Ianoz, M.V., Karlsson, T., *EMC analysis methods and computational models*, John Wiley & Sons, New-York, 1997.

5.2.Micu, D., Demoulin, B., *Directive si norme europene de compatibilitate electromagnetică*, Litografia Universitatii Tehnice Cluj-Napoca, 1998.

5.3.Micu, D., *Contributions à la synthèse du champ éléctromagnétique par la méthode de régularisation des systèmes dégénérés*, Revue roumaine des sciences techniques, serie É.É., tome 38, Vol. 2, pp 169-179, Bucarest, 1993

5.4.Householder, A.S., *The theory of matrices in numerical analysis*, Blaisdele Publishing Company, New York-Toronto-London, 1964.

5.5.Braatz, R.D., Morari, M., *Minimizing the euclidean condition number*, SIAM J Control and Optimization, 32, 6, pp1763-1768, 1994.

5.6.Démidovitch, B., Maron, I., *Éléments de calcul numérique*, Édition Mir, Moscou,1973.

5.7.Stewart, G.W., *Introduction to matrix computations*, Academic Press, New York-London, 1973.

5.8.Wilkinson, J.H., *The algebric eigenvalue*, Clarendon Press, Oxford, 1965.

5.9.Micu, D., Micu, Adriana, *Synthesis of homogeneous field for magnetic resonance imaging*, CADEMEC '97, 24-27, Cluj-Napoca, 1997.

5.10.Bucur, C., Popeea, A., Simion, Gh.Gh., *Matematici speciale.Calcul numeric*, E.D.P.Bucuresti,1993..

5.11.Micu, Adriana, Micu, D., Patachi, N., *Le nombre de condition*, Revue roumaine des sciences technique, serie E.E., tome 44, Vol.2, pp. 121-134, Bucarest, 1999.

5.12.Micu, Adriana, Micu D., *Sur l'inegalite de Wielandt et Kantorovitch*, Revue roumaine des sciences technique, serie É.É., tome 44, Vol.3, pp 305-315, Bucarest, 1999.

5.13.Lascaux, P., Théodor, R., *Analyse numérique matricielle appliquée a l'art de l'ingénieur*, Masson, Paris,1993

Scanned with OKEN Scanner

6. ANALIZA ŞI SINTEZA NUMERICĂ ÎN MEDII OMOGENE ŞI NEOMOGENE CU METODA MONTE CARLO

6.1 INTRODUCERE

Problema analizei numerice a câmpului electric şi magnetic în domenii neomogene este cunoscută . Se pot cita multe titluri din literatura de specialitate care tratează acest aspect [6.1], [6.2], [6.3].

Analiza câmpului electrostatic cu metoda Monte Carlo în medii neomogene a fost abordată în premieră în urmă cu trei decenii [6.4], [6.5], pentru o serie de cazuri particulare.

Problema Monte Carlo în medii neomogene ridică o serie de dificultăţi legate de deplasarea particulei fictive, dificultăţi care sunt rezolvate în mod diferit şi numai parţial de cercetătorii din domeniu.

În ceea ce priveşte problema sintezei câmpului electric în medii neomogene lucrurile stau cu totul altfel. Lucrările care au ca obiect acest aspect sunt puţine iar sinteza câmpului electrostatic şi magnetic în medii neomogene cu metoda Monte-Carlo are bazele puse în capitolul care urmează. O parte din ideile prezentate în continuare au fost abordate în [6.6].

6.2 BAZELE TEORETICE ALE METODEI MONTE CARLO DE ANALIZĂ ŞI SINTEZĂ NUMERICĂ PENTRU MEDII NEOMOGENE

Considerăm că stabilirea bazelor teoretice ale metodei Monte Carlo înseamnă indicarea concretă şi precisă a modului de alcătuire a sistemului de ecuaţii specific sintezei, sistem în general degenerat sau rău condiţionat [6.7],[6.8] ale cărui pseudosoluţii constituie răspunsul numeric al problemei sintezei în medii neomogene.

Principala aproximaţie, care de fapt individualizează metoda de sinteză propusă, este că reţeaua de discretizare dreptunghiulară se consideră suficient de fină pentru a putea admite că frontiera domeniilor de neomogenitate este formată numai din porţiuni paralele cu axele de coordonate.

S-a considerat necesar la acest capitol să se determine forma numerică a ecuaţiei Poisson şi Laplace pentru reţea de discretizare dreptunghiulară, mediu omogen şi neomogen, în câmp electric şi magnetic staţionar datorită faptului că mediile neomogene având frontierele paralele cu axele, ecuaţiile trebuie puse sub o formă convenabilă.

Scanned with OKEN Scanner

6.2.1 FORMA NUMERICĂ A ECUAȚIEI LUI POISSON PENTRU REȚEA DE DISCRETIZARE DREPTUNGHIULARĂ ȘI MEDIU NEOMOGEN (CÂMP ELECTRIC STAȚIONAR)

Se va deduce forma numerică a ecuației lui Poisson pentru o rețea de discretizare dreptunghiulară cu pași inegali și mediu neomogen caracterizat prin permitivitățile ε_1, ε_2 frontiera de separație dintre medii fiind paralelă cu una din axele de coordonate, în cazul de față cu Ox (Fig.6.1).

Se va considera că în mediul de permitivitate ε_1 există sarcină electrică adevărată cu densitatea constantă ρ_1 , iar în mediul de permitivitate ε_2 cu densitatea ρ_2. Reamintim că problema fiind plan paralelă densitățile ρ_1 și ρ_2 sunt densități de suprafață, dar având în vedere corespondența cu problema din spațiul real cu trei dimensiuni trebuie să precizăm că dimensional ρ_1 și ρ_2 sunt densități de volum, a treia dimensiune fiind de valoare unitară și orientată în direcția axei Oz [6.9].

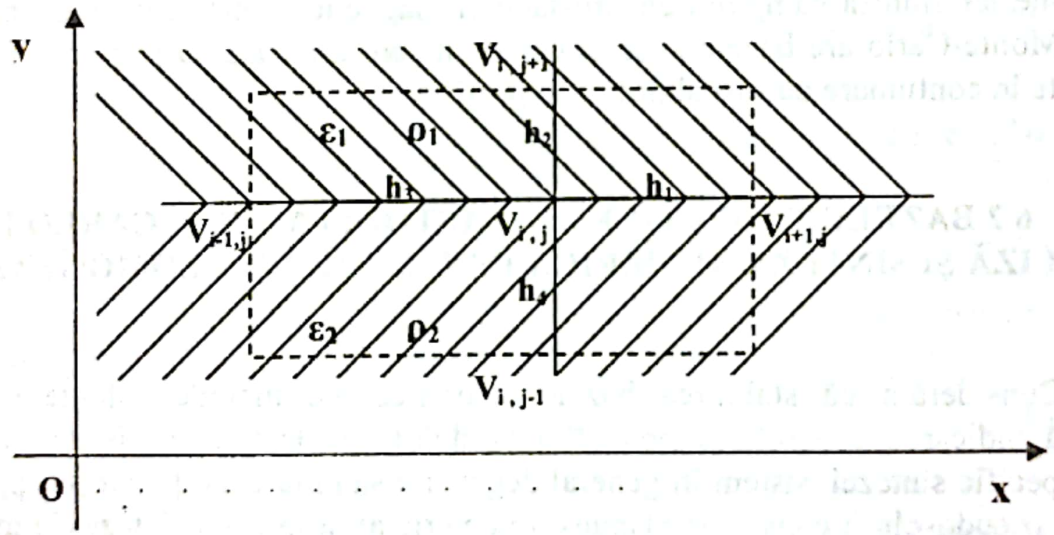


Fig.6.1. Model pentru ecuația lui Poisson în mediu neomogen

Vom prezenta două metode de a deduce forma numerică a ecuației lui Poisson pentru rețea de discretizare dreptunghiulară și mediu neomogen, prima bazată pe aproximarea funcției potențial prin dezvoltare în serie Taylor și folosirea explicită a ecuației lui Poisson (metodă pe care o socotim originală, cu rezervele de rigoare impuse de subiectul în discuție) iar a doua metodă având la bază folosirea directă a legii fluxului electric pe domeniul discretizat, teorema potențialului electrostatic fiind aplicată în mod implicit prin exprimarea câmpului în funcție de potențial.

Scanned with OKEN Scanner

6.2.1.1 METODA SERIEI TAYLOR

Considerând o funcţie f (x,y) indefinit derivabilă, funcţia f (x + h, y) se poate dezvolta în serie Taylor în jurul punctului (x , y):

$$f(x+h,y)=f(x,y)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\right)_{x,y}\frac{h^k}{k!} \qquad (6.1)$$

Se asimilează funcţia f(x,y) cu funcţia V(x,y) care reprezintă potenţialul în mediul omogen de permitivitate ε , Fig.6.2, se ia $h=h_1$ şi cu notaţii care sunt consacrate, rezultă

$$V_{i+1,j}=V_{i,j}+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{i,j}h_1+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{i,j}\frac{h_1^2}{2}+e_1 \qquad (6.2)$$

Cu e_1 s-a notat suma termenilor seriei începând cu al patrulea termen. Se va considera în cele ce urmează că e_1 este mult mai mic decât primii trei termeni ai seriei şi se va lua $e_1 = 0$ în exprimarea lui $V_{i+1,j}$

Considerând în mod asemănător $h= - h_3$ rezultă

$$V_{i-1,j}=V_{i,j}-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{i,j}h_3+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{i,j}\frac{h_3^2}{2}+e_2 \qquad (6.3)$$

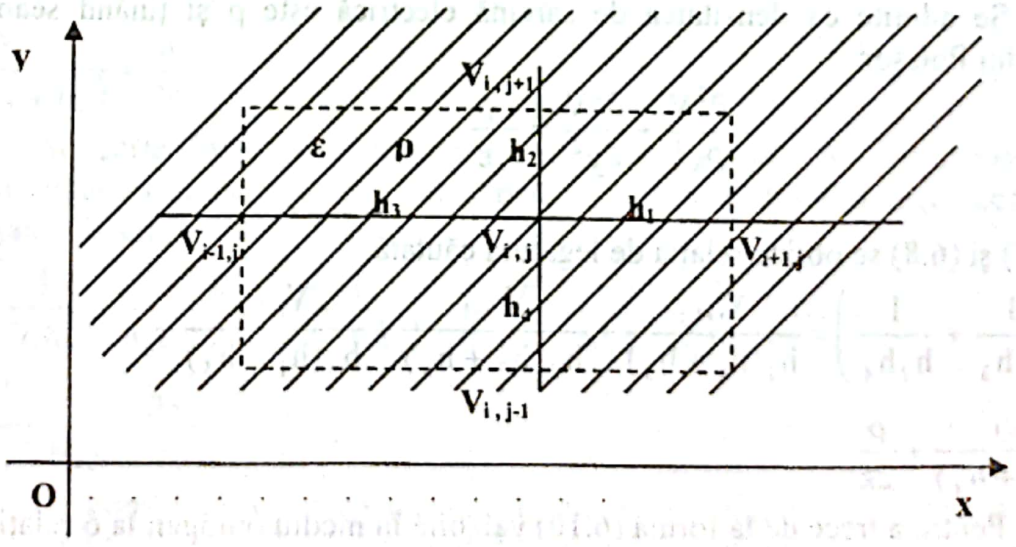


Fig.6.2. Model pentru forma numerică a ecuaţiei lui Poisson în mediu omogen

Scanned with OKEN Scanner

Funcția f(x ,y + h) se dezvoltă în serie Taylor în jurul aceluiasi punct (x,y)

$$f(x,y+h)=f(x,y)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\partial^k f}{\partial y^k}\right)_{x,y}\frac{h^k}{k!} \tag{6.4}$$

Considerând în relația de mai sus aceeași funcție V(x,y) în loc de f(x,y) și luând $h=h_2$ avem

$$V_{i,j+1}=V_{i,j}+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{i,j}h_2+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_{i,j}\frac{h_2^2}{2}+e_3 \tag{6.5}$$

La fel pentru $h=-h_4$ rezultă

$$V_{i,j-1}=V_{i,j}-\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{i,j}h_4+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_{i,j}\frac{h_4^2}{2}+e_4 \tag{6.6}$$

Cu observația că în (6.3), (6.5) și (6.6) e_2, e_3, e_4 se consideră nuli, adică se aproximează membrul stâng din relațiile respective prin primii trei termeni ai seriei Taylor, se poate trece la obținerea relației de legătură între potențialele celor cinci puncte.

Se elimină derivata întâia a potențialului între relațiile (6.2) și (6.3) și se obține

$$h_3V_{i+1,j}+h_1V_{i-1,j}=(h_1+h_3)V_{i,j}+\frac{h_1h_3}{2}(h_1+h_3)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \tag{6.7}$$

Analog, eliminînd derivata întâia a potențialului între (6.5) și (6.6) avem

$$h_4V_{i,j+1}+h_2V_{i,j-1}=(h_2+h_4)V_{i,j}+\frac{h_2h_4}{2}(h_2+h_4)\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \tag{6.8}$$

Se admite că densitatea de sarcină electrică este ρ și ținând seama de ecuația lui Poisson

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{6.9}$$

din (6.7) și (6.8) se obține relația de legătură căutată

$$V_{i,j}\left(\frac{1}{h_1h_3}+\frac{1}{h_2h_4}\right)=\frac{V_{i+1,j}}{h_1(h_1+h_3)}+\frac{V_{i,j+1}}{h_2(h_2+h_4)}+\frac{V_{i-1,j}}{h_3(h_1+h_3)}+\frac{V_{i,j-1}}{h_4(h_2+h_4)}+\frac{\rho}{2\varepsilon} \tag{6.10}$$

Pentru a trece de la forma (6.10) valabilă în mediu omogen la o relație care să fie valabilă în mediu neomogen se face un artificiu original și anume se consideră două domenii neomogene ca în Fig.6.3.

Potențialul este funcție continuă la frontiera de trecere dintre două domenii de permitivități diferite deci $V_{i,j}$ este același în cele două medii.

Scanned with OKEN Scanner

Se scrie o relaţie de forma (6.10) pentru $V'_{i,j}$ din mediul de permitivitate ε_1 şi pentru cele patru puncte alăturate.Mediul se consideră încărcat cu densitatea de sarcină ρ_1.

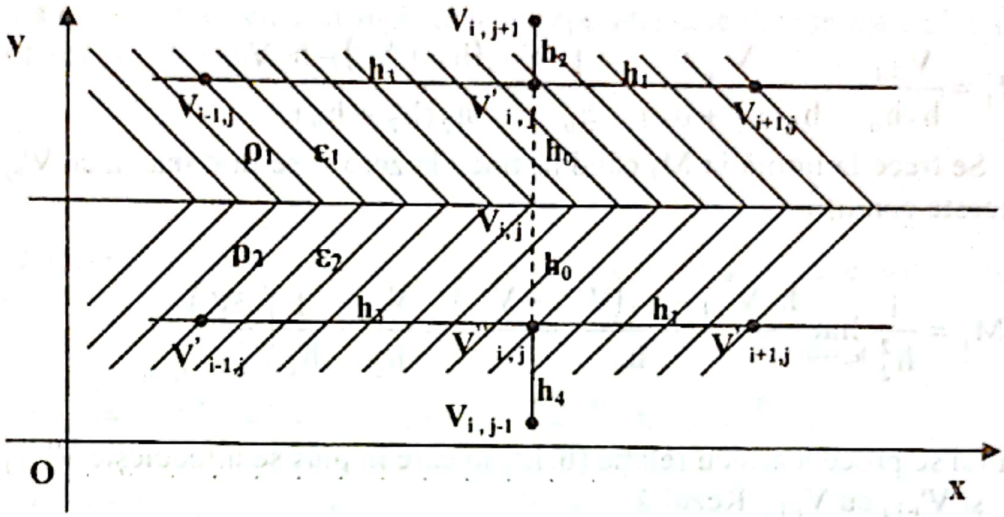


Fig.6.3. Artificiul de trecere de la mediul omogen la mediul neomogen

$$V'_{i,j}\left(\frac{1}{h_1h_3}+\frac{1}{h_2h_0}\right)=\frac{V_{i+1,j}}{h_1(h_1+h_3)}+\frac{V_{i,j+1}}{h_2(h_2+h_0)}+\frac{V_{i-1,j}}{h_3(h_1+h_3)}+$$
$$\frac{V_{i,j}}{h_0(h_2+h_0)}+\frac{\rho_1}{2\varepsilon_1} \qquad (6.11)$$

Se scrie încă o relaţie de forma (6.10) pentru $V''_{i,j}$ din mediul de permitivitate ε_2 şi pentru cele patru puncte alăturate .Mediul este încărcat cu densitatea de sarcină ρ_2

$$V''_{i,j}\left(\frac{1}{h_1h_3}+\frac{1}{h_0h_4}\right)=\frac{V'_{i+1,j}}{h_1(h_1+h_3)}+\frac{V_{i,j}}{h_0(h_0+h_4)}+\frac{V'_{i-1,j}}{h_3(h_1+h_3)}+$$
$$\frac{V_{i,j-1}}{h_4(h_0+h_4)}+\frac{\rho_2}{2\varepsilon_2} \qquad (6.12)$$

Se consideră acum că distanţa h_0 se micşorează până ajunge la zero.În aceste condiţii punctele de potenţial $V'_{i,j}$ şi $V''_{i,j}$ se suprapun peste punctul de potenţial $V_{i,j}$.La fel punctele de potenţial $V_{i+1,j}$ şi $V'_{i+1,j}$ se suprapun şi respectiv $V_{i-1,j}$ şi $V'_{i-1,j}$ (Fig.6.3) pe baza continuităţii potenţialului la suprafaţa de separaţie dintre două medii.

Scanned with OKEN Scanner

Se separă în membrul stâng al relației (6.11) termenii care îl conțin pe h_0 ca factor la numitor și rezultă

$$\frac{V'_{i,j}}{h_2 h_0} - \frac{V_{i,j}}{h_0(h_2+h_0)} = \frac{V_{i+1,j}}{h_1(h_1+h_3)} + \frac{V_{i,j+1}}{h_2(h_2+h_0)} + \frac{V_{i-1,j}}{h_3(h_1+h_3)} - \frac{V'_{i,j}}{h_1 h_3} + \frac{\rho_1}{2\varepsilon_1}$$

Se notează membrul stâng cu M_1

$$M_1 = \frac{V'_{i,j}}{h_2 h_0} - \frac{V_{i,j}}{h_0(h_2+h_0)} = \frac{1}{h_0}\,\frac{V'_{i,j}(h_2+h_0) - h_2 V_{i,j}}{h_2(h_2+h_0)}$$

Se trece la limită în M_1 când h_0 tinde la zero și se ține seama că $V'_{i,j}$ devine $V_{i,j}$ în aceste condiții

$$\lim_{h_0\to 0} M_1 = \frac{1}{h_2^2}\lim_{h_0\to 0}\frac{h_0 V'_{i,j} + h_2\left(V'_{i,j} - V_{i,j}\right)}{h_0} = \frac{V_{i,j}}{h_2^2} + \frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{i,j,\varepsilon_1}$$

La fel se procedează cu relația (6.12) în care în plus se înlocuiește $V'_{i+1,j}$ cu $V_{i+1,j}$ și $V'_{i-1,j}$ cu $V_{i-1,j}$ .Rezultă

$$\frac{V''_{i,j}}{h_4 h_0} - \frac{V_{i,j}}{h_0(h_4+h_0)} = \frac{V_{i+1,j}}{h_1(h_1+h_3)} + \frac{V_{i-1,j}}{h_3(h_1+h_3)} + \frac{V_{i,j-1}}{h_4(h_0+h_4)} - \frac{V''_{i,j}}{h_1 h_3} + \frac{\rho_2}{2\varepsilon_2}$$

Analog se notează membrul stâng cu M_2, se trece la limită și rezultă

$$\lim_{h_0\to 0} M_2 = \frac{V_{i,j}}{h_4^2} - \frac{1}{h_4}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{i,j,\varepsilon_2}$$

Relația (6.11) devine

$$V_{i,j}\left(\frac{1}{h_1 h_3} + \frac{1}{h_2^2}\right) + \frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{i,j,\varepsilon_1} = \frac{V_{i+1,j}}{h_1(h_1+h_3)} + \frac{V_{i,j+1}}{h_2^2} + \frac{V_{i-1,j}}{h_3(h_1+h_3)} + \frac{\rho_1}{2\varepsilon_1} \qquad (6.13)$$

Analog, (6.12) devine:

$$V_{i,j}\left(\frac{1}{h_1 h_3 + h_4^2}\right) - \frac{1}{h_4}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{i,j,\varepsilon_2} = \frac{V_{i+1,j}}{h_1(h_1+h_3)} + \frac{V_{i-1,j}}{h_3(h_1+h_3)} + \frac{V_{i,j-1}}{h_4^2} + \frac{\rho_2}{2\varepsilon_2} \qquad (6.14)$$

Scanned with OKEN Scanner

Se ţine seama că $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{i,j,\varepsilon_1}$ reprezintă componenta normală a câmpului electric la suprafaţa de separaţie calculată în mediul 1, iar $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{i,j,\varepsilon_2}$ reprezintă componenta normală a câmpului electric la suprafaţa de separaţie calculată în mediul 2, astfel că pe baza teoremei de refracţie avem

$$\varepsilon_1\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{i,j,\varepsilon_1} = \varepsilon_2\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{i,j,\varepsilon_2}$$

Folosind ultima relaţie se elimină derivata potenţialului între ecuaţiile (6.13) şi (6.14) şi rezultă :

$$V_{i,j}\left(\frac{\varepsilon_1 h_2 + \varepsilon_2 h_4}{h_1 h_3} + \frac{\varepsilon_1}{h_2} + \frac{\varepsilon_2}{h_4}\right) = \frac{\varepsilon_1 h_2 + \varepsilon_2 h_4}{h_1(h_1 + h_3)} V_{i+1,j} + \frac{\varepsilon_1}{h_2} V_{i,j+1} + \frac{\varepsilon_1 h_2 + \varepsilon_2 h_4}{h_3(h_1 + h_3)} V_{i-1,j} + \frac{\varepsilon_2}{h_4} V_{i,j-1} + \frac{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_4}{2} \qquad (6.15)$$

Ecuaţia (6.15) reprezintă aproximarea ecuaţiei lui Poisson prin diferenţe finite în cazul unei reţele de discretizare dreptunghiulare cu paşi inegali, în cazul mediului neomogen (Fig.6.1)

În cazul particular $h_1 = h_3 = h_x$ şi $h_2 = h_4 = h_y$ adică reţea rectangulară cu paşi invariabili pe direcţia axei Ox respectiv Oy ecuaţia (6.15) devine

$$V_{i,j}\left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}\right) = \frac{1}{h_x^2} V_{i+1,j} + \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{1}{h_y^2} V_{i,j+1} + \frac{1}{h_x^2} V_{i-1,j} + \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{1}{h_y^2} V_{i,j-1} + \frac{\rho_1 + \rho_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \qquad (6.16)$$

Se introduc notaţiile

$$m = \frac{2h_y^2}{h_x^2 + h_y^2} \qquad (6.17)$$

$$n = \frac{2h_x^2}{h_x^2 + h_y^2} \qquad (6.18)$$

Scanned with OKEN Scanner

$$p = \frac{h_x^2 h_y^2}{2(h_x^2 + h_y^2)} \tag{6.19}$$

$$S_{i,j} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \tag{6.20}$$

Ecuația (6.16) devine

$$V_{i,j} = \frac{1}{4}\left(mV_{i+1,j} + \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} nV_{i,j+1} + mV_{i-1,j} + \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} nV_{i,j-1} \right) + pS_{i,j} \tag{6.21}$$

În cazul rețelei de discretizare pătrate, $h_x=h_y$ și $m=n=1$, $p=\frac{1}{4}$ și rezultă

$$V_{i,j} = \frac{1}{4}\left(V_{i+1,j} + \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} V_{i,j+1} + V_{i-1,j} + \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} V_{i,j-1} \right) + \frac{1}{4} S_{i,j} \tag{6.22}$$

Particularizând în continuare, dacă mediul este omogen pe porțiunea considerată atunci $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$, situație în care discretizarea rețelei se poate face așa încât $\rho_1=\rho_2=\rho$ și relația (6.21) devine

$$V_{i,j} = \frac{1}{4}(mV_{i+1,j} + nV_{i,j+1} + mV_{i-1,j} + nV_{i,j-1}) + pS_{i,j} \tag{6.23}$$

unde $S_{i,j} = \rho/\varepsilon$.

Această formă s-a folosit pentru stabilirea relațiilor de bază ale metodei Monte-Carlo de analiză și sinteză a câmpului electromagnetic în medii omogene pentru rețele de discretizare dreptunghiulare [6.10].

În cazul rețelei de discretizare pătratice $h_x=h_y=h$ și mediu omogen, relația (6.21) se reduce la o formă și mai simplă

$$V_{i,j} = \frac{1}{4}(V_{i+1,j} + V_{i,j+1} + V_{i-1,j} + V_{i,j-1}) + \frac{h^2}{4} S_{i,j}$$

Cu ajutorul ultimei relații se demonstrează forma clasică a metodei de analiză Monte-Carlo [6.1].

6.2.1.2 METODA FLUXULUI ELECTRIC

Se consideră situația din Fig.6.4. În centrele de simetrie ale dreptunghiurilor definite de punctele [(i+1,j) , (i,j) , (i,j+1)] ; [(i,j+1) , (i,j) ,(i-1,j)] , [(i-1,j) , (i,j) ,(i,j-1)] ;și [(i,j-1) , (i,j) , (i+1,j)] se iau punctele A, B, C, D, conform cu Fig.6.4 .

Scanned with OKEN Scanner

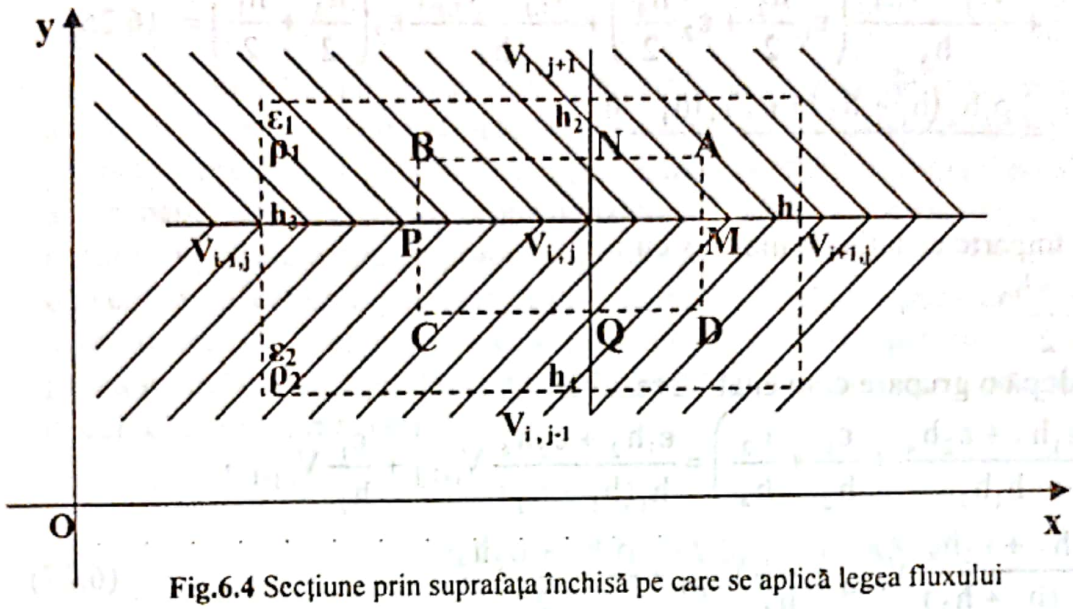


Fig.6.4 Secţiune prin suprafaţa închisă pe care se aplică legea fluxului

Aceste puncte definesc în plan un contur dreptunghiular ABCD .Dacă se ţine seama că problema este plan-paralelă, se poate socoti că acest contur defineşte un paralelipiped dreptunghic de secţiune ABCD având a treia dimensiune de valoare unitară orientată de-a lungul axei Oz.

Se aplică legea fluxului electric pe această suprafaţă paralelipipedică Σ

$$\int_{\Sigma} \mathbf{DdA}=q_{\Sigma} \qquad (6.24)$$

Se aproximează componenta câmpului electric pe direcţia şi sensul axei Ox cu expresia în diferenţe finite care rezultă din teorema potenţialului electrostatic

$$E_x = \frac{V_{i,j} - V_{i+1,j}}{h_1} \qquad (6.25)$$

Se admite că expresia (6.25) este valabilă pentru toate punctele suprafeţei definite de segmentul AD şi dimensiunea unitară perpendiculară pe plan, aşadar pentru componenta câmpului pe Ox se va folosi expresia (tot aproximativă) a câmpului electric în punctul M, conform Fig.6.4.

Analog se face raţionamentul şi pentru celelalte laturi ale dreptunghiului ABCD., folosindu-se expresiile aproximative ale câmpurilor din punctele N , P şi Q.

Se mai ţine seama că dreptunghiul MABP este caracterizat de permitivitatea ε_1 şi densitatea de sarcină ρ_1 iar dreptunghiul DMPC este caracterizat de permitivitatea ε_2 şi densitatea de sarcină ρ_2. În aceste condiţii legea fluxului electric se scrie sub forma

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{V_{i,j}-V_{i+1,j}}{h_1}\left(\varepsilon_2\frac{h_4}{2}+\varepsilon_1\frac{h_2}{2}\right)+\frac{V_{i,j}-V_{i,j+1}}{h_2}\varepsilon_1\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_3}{2}\right)+$$
$$+\frac{V_{i,j}-V_{i-1,j}}{h_3}\left(\varepsilon_1\frac{h_2}{2}+\varepsilon_2\frac{h_4}{2}\right)+\frac{V_{i,j}-V_{i,j-1}}{h_4}\varepsilon_2\left(\frac{h_3}{2}+\frac{h_1}{2}\right)= \quad (6.26)$$
$$=\frac{\rho_1 h_2(h_1+h_3)+\rho_2 h_4(h_1+h_3)}{4}$$

Se împarte ecuația de mai sus cu

$$\frac{h_1+h_3}{2}$$

și după o grupare convenabilă rezultă

$$V_{i,j}\left(\frac{\varepsilon_1 h_2+\varepsilon_2 h_4}{h_1 h_3}+\frac{\varepsilon_1}{h_2}+\frac{\varepsilon_2}{h_4}\right)=\frac{\varepsilon_1 h_2+\varepsilon_2 h_4}{h_1(h_1+h_3)}V_{i+1,j}+\frac{\varepsilon_1}{h_2}V_{i,j+1}+$$
$$\frac{\varepsilon_1 h_2+\varepsilon_2 h_4}{h_3(h_1+h_3)}V_{i-1,j}+\frac{\varepsilon_2}{h_4}V_{i,j-1}+\frac{\rho_1 h_2+\rho_2 h_4}{2} \quad (6.27)$$

adică exact relația (6.15) dedusă anterior cu artificiul prezentat la metoda seriei Taylor.

Relația (6.27) reprezintă așadar ecuația lui Poisson în diferențe finite pentru o rețea de discretizare dreptunghiulară cu pași inegali și mediu neomogen, suprafața de frontieră dintre medii fiind orizontală și despărțind exact dreptunghiul pentru care este scrisă ecuația de mai sus.

Să remarcăm plusul de precizie pe care această metodă îl aduce. Astfel cu această metodă devine evident că domeniul propriu punctului (i,j) este numai paralelipipedul de secțiune ABCD, restul zonei fiind propriu punctelor alăturate.

Pentru $h_1 = h_3 = h_x$ și pentru $h_2 = h_4 = h_y$ se obține relația (6.16).

Notațiile(6.17)-(6.20) rămân valabile și la această metodă și se obține relația (6.21), iar în cazuri particulare (6.22) și (6.23)

În cazul în care suprafața de separație dintre mediile de permitivități diferite este verticală, expresia potențialului se deduce din (6.21)

$$V_{i,j}=\frac{1}{4}\left(\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}mV_{i+1,j}+nV_{i,j+1}+\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}mV_{i-1,j}+nV_{i,j-1}\right)+pS_{i,j} \quad (6.28)$$

Relația (6.28) este valabilă pentru ε_1 la stânga și ε_2 la dreapta.

În cazul că mediul de permitivitate ε_1 este la dreapta suprafeței de separație și ε_2 la stânga se inversează indicii permitivităților în (6.28) și rezultă

$$V_{i,j}=\frac{1}{4}\left(\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}mV_{i+1,j}+nV_{i,j+1}+\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}mV_{i-1,j}+nV_{i,j-1}\right)+pS_{i,j} \quad (6.29)$$

Scanned with OKEN Scanner

6.2.2 FORMA NUMERICA A ECUATIEI LUI POISSON PENTRU RETEA DE DISCRETIZARE DREPTUNGHIULARĂ SI MEDIU NEOMOGEN (CÂMP MAGNETIC STAȚIONAR)

Vom presupune ca neomogenitățile care apar definesc domenii care au suprafețele de separație paralele cu planele de coordonate. Această presupunere nu restrânge prea mult generalitatea problemei, având în vedere posibilitatea de a alege pasul de discretizare corespunzător. Presupunerea făcută, aceeași ca și în cazul câmpului electric staționar, simplifică aplicarea metodei Monte Carlo pe care o avem în vedere ca o posibilitate de rezolvare. Se vor propune două metode pentru determinarea formei numerice a ecuației lui Poisson pentru mediu neomogen, prima metodă bazată pe dezvoltarea în serie Taylor, iar a doua pe aplicarea directă a legii circuitului magnetic.

6.2.2.1 METODA SERIEI TAYLOR

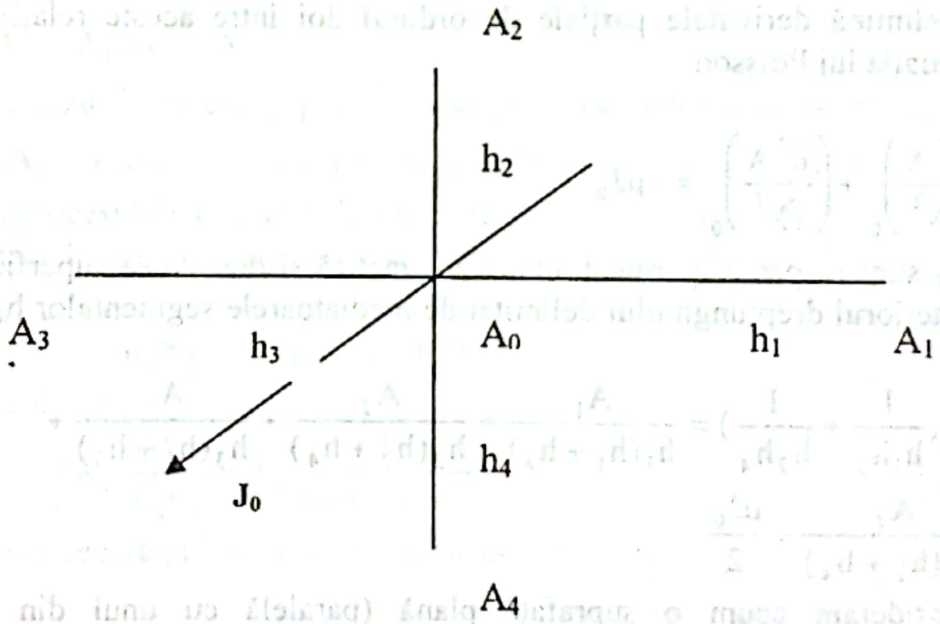


Fig.6.5 Schema pentru forma numerică a ecuației Poisson pentru mediu omogen

Se consideră rețeaua de discretizare din Fig.6.5 si se consideră pentru început mediul omogen. Pentru că problema se consideră plan paralelă $\mathbf{J}(x,y,z)=J_z(x,y)\,\mathbf{k}=J_0$ și în consecință $\mathbf{A}(x,y,z)=A_z(x,y)\,\mathbf{k}$. În aceste condiții nu se vor mai nota indicii.

Scanned with OKEN Scanner

Se consideră o funcție indefinit derivabilă f(x,y). Se poate scrie :

$$f(x+h,y)=f(x,y)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^k f(x,y)}{\partial x^k}\frac{h^k}{k!} \tag{6.30}$$

Considerând $h=h_1$ respectiv $h=-h_3$ avem relatiile:

$$A_1=A_0+\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_0 h_1+\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_0\frac{h_1^2}{2}+e_1 \tag{6.31}$$

$$A_3=A_0-\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_0 h_3+\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_0\frac{h_3^2}{2}+e_3 \tag{6.32}$$

Se face acum aproximarea termenilor din membrul stâng cu primii trei termeni din membrul drept (deci se consideră $e_1=0$ si $e_3=0$) si se elimină derivata întâi a potențialului între relațiile (6.31) si (6.32). Rezultă:

$$h_3A_1+h_1A_3=(h_1+h_3)A_0+\frac{h_1h_3}{2}(h_1+h_3)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_0 \tag{6.33}$$

O relație analoagă se scrie pe direcția axei y.

Se elimină derivatele parțiale de ordinul doi între aceste relații ținând seama de ecuația lui Poisson

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_0+\left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_0=-\mu J_0 \tag{6.34}$$

unde μ si J_0 sunt respectiv permeabilitatea magnetică si densitatea superficială de curent in interiorul dreptunghiului delimitat de mediatoarele segmentelor h_1, h_2, h_3, h_4. Rezultă:

$$A_0\left(\frac{1}{h_1h_3}+\frac{1}{h_2h_4}\right)=\frac{A_1}{h_1(h_1+h_3)}+\frac{A_2}{h_2(h_2+h_4)}+\frac{A_3}{h_3(h_1+h_3)}+\frac{A_4}{h_4(h_2+h_4)}+\frac{\mu J_0}{2} \tag{6.35}$$

Considerăm acum o suprafață plană (paralelă cu unul din planele triedrului) care separă mediile de permitivitate μ_1 si μ_2. Problema fiind plan-paralelă, se va lucra în unul din planele de secțiune. Ideea este aceeași ca și pentru câmpul electric, schema fiind asemănătoare celei din Fig.6.3.

Se scrie ecuația (6.35) pentru mediul de deasupra planului, mediu de permitivitate μ_1:

Scanned with OKEN Scanner

$$A_0'\left(\frac{1}{h_1h_3}+\frac{1}{h_2h_0}\right)=\frac{A_1}{h_1(h_1+h_3)}+\frac{A_2}{h_2(h_2+h_0)}+\frac{A_3}{h_3(h_1+h_3)}+$$
$$+\frac{A_0}{h_0(h_2+h_0)}+\frac{\mu_1 J_1}{2} \qquad (6.36)$$

Se scrie apoi aceeași ecuație (6.35) pentru mediul aflat sub suprafața de separație, mediu de permitivitate μ_2 :

$$A_0''\left(\frac{1}{h_1h_3}+\frac{1}{h_0h_4}\right)=\frac{A_1'}{h_1(h_1+h_3)}+\frac{A_0}{h_0(h_0+h_4)}+\frac{A_3'}{h_3(h_1+h_3)}+$$
$$\frac{A_4}{h_4(h_0+h_4)}+\frac{\mu_2 J_2}{2} \qquad (6.37)$$

Se consideră acum că h_0 devine din ce în ce mai mic. Din faptul că A este continuu la suprafața de separație (componenta normală se conservă în virtutea condiției de etalonare Coulomb

$$\mathrm{div}\mathbf{A}=0 \qquad (6.38)$$

iar componenta tangențiala în virtutea relației de conservare a fluxului la suprafața de separație) rezultă

$$A_1'=A_1;A_3'=A_3; \qquad (6.39)$$

In cazul in care A_0' și A_0'' nu au pe h_0 ca factor la numitor se transformă direct in A_0 . Termenii care îl conțin pe h_0 la numitor ca și factor trebuie analizați separat în procesul de trecere la limită în relatiile (6.36) si (6.37).

Astfel din (6.36) se separă în membrul stâng gruparea nedeterminată

$$E_1=A_0'\frac{1}{h_0h_2}-A_0\frac{1}{h_0(h_2+h_0)}=\ldots \qquad (6.40)$$

iar din (6.37):

$$E_2=A_0''\frac{1}{h_0h_4}-A_0\frac{1}{h_0(h_4+h_0)}=\ldots \qquad (6.41)$$

Prin trecere la limita se obtine succesiv:

$$\lim_{h_0\to 0}E_1=\lim_{h_0\to 0}\frac{1}{h_0}\frac{A_0'(h_2+h_0)-A_0h_2}{h_2(h_2+h_0)}=\frac{1}{h_2^2}\lim_{h_0\to 0}\frac{A_0'h_0+h_2(A_0'-A_0)}{h_0}=$$
$$=\frac{A_0}{h_2^2}+\frac{1}{h_2}\lim_{h_0\to 0}\frac{A_0'-A_0}{h_0}=\frac{A_0}{h_2^2}+\frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{0(\mu_1)}=\ldots \qquad (6.42)$$

Analog se obține

Scanned with OKEN Scanner

$$\lim_{h_0 \to 0} E_2 = \frac{A_0}{h_4^2} - \frac{1}{h_4}\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{0(\mu_2)} = \ldots \tag{6.43}$$

Din

$$\mathbf{B}=\text{rot}\mathbf{A}=\text{rot}A\mathbf{k}=\frac{\partial A}{\partial y}\,\mathbf{i}-\frac{\partial A}{\partial x}\,\mathbf{j} \tag{6.44}$$

Rezultă

$$\frac{\partial A}{\partial y} = B_x \tag{6.45}$$

adica $\frac{\partial A}{\partial y}$ este componenta inducției magnetice dupa direcția tangențială la suprafața de separație.

Din condiția de conservare a componentei tangențiale a câmpului magnetic la suprafața de separație dintre două medii de permitivități diferite rezultă:

$$\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{0(\mu_1)} = \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{0(\mu_2)} \tag{6.46}$$

Cu ajutorul relației (6.46) se elimină derivata parțială a potențialului între relațiile (6.36) şi (6.37) şi se obține astfel forma numerică a ecuației lui Poisson pentru medii neomogene (în acest caz planul de separație fiind paralel cu xOz) şi rețea de discretizare dreptunghiulară cu paşi inegali. S-a preferat folosirea reluctivității magnetice în loc de permeabilitatea magnetică, datorită dualității care se va pune în evidență:

$$A_0\left(\frac{\nu_1 h_2 + \nu_2 h_4}{h_1 h_3} + \frac{\nu_1}{h_2} + \frac{\nu_2}{h_4}\right) = A_1 \frac{\nu_1 h_2 + \nu_2 h_4}{h_1(h_1 + h_3)} + A_2 \frac{\nu_1}{h_2} + \\ + A_3 \frac{\nu_1 h_2 + \nu_2 h_4}{h_3(h_1 + h_3)} + A_4 \frac{\nu_2}{h_4} + \frac{(J_1 h_2 + J_2 h_4)}{2} \tag{6.47}$$

Se observă că dacă potențialul magnetic se înlocuieşte cu potențialul electric şi reluctivitatea magnetică se înlocuieşte cu permitivitatea electrică, formula (6.47) se transformă în relația (6.15), cum era de aşteptat.

Se pot face particularizări

1)Daca rețeaua este cu paşi invariabili, atunci se notează $h_1=h_3=h_x$, $h_2=h_4=h_y$ şi formula (6.47) devine:

$$A_0\left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}\right) = \frac{A_1}{h_x^2} + \frac{A_2}{h_y^2}\frac{2\nu_1}{\nu_1 + \nu_2} + \frac{A_3}{h_x^2} + \frac{A_4}{h_y^2}\frac{2\nu_2}{\nu_1 + \nu_2} + \frac{(J_1 + J_2)}{(\nu_1 + \nu_2)} \tag{6.48}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu notațiile (6.16)-(6.19) și

$$S_0=\frac{J_1+J_2}{\nu_1+\nu_2}$$

relația (6.48) se mai scrie:

$$A_0=\frac{1}{4}(mA_1+nA_2\frac{2\nu_1}{\nu_1+\nu_2}+mA_3+nA_4\frac{2\nu_2}{\nu_1+\nu_2})+pS_0 \qquad (6.49)$$

Forma (6.49) este utilă pentru aplicarea metodei Monte Carlo în mediu neomogen cu rețea de discretizare dreptunghiulară cu pași invariabili.

2)Dacă mediul este omogen, (6.49) devine

$$A_0=\frac{1}{4}(mA_1+nA_2+mA_3+nA_4)+pS_0 \qquad (6.50)$$

Forma (6.50) este utilă pentru aplicarea metodei Monte Carlo în mediu omogen cu rețea de discretizare dreptunghiulară cu pași invariabili.

3) Daca rețeaua de discretizare este pătrată, dar mediul este neomogen, formula devine:

$$A_0=\frac{1}{4}(A_1+A_2\frac{2\nu_1}{\nu_1+\nu_2}+A_3+A_4\frac{2\nu_2}{\nu_1+\nu_2})+\frac{h^2}{4}S_0 \qquad (6.51)$$

Forma (6.51) este utilă pentru aplicarea metodei Monte Carlo în mediu neomogen cu rețea de discretizare uniformă. Este o formă convenabilă în aplicații, precedenta ducând la prelungirea timpului de calcul.

4) Daca problema este de tip Laplace atunci surse nu mai există si formula (6.51) devine

$$A_0=\frac{1}{4}(A_1+A_2\frac{2\nu_1}{\nu_1+\nu_2}+A_3+A_4\frac{2\nu_2}{\nu_1+\nu_2}) \qquad (6.52)$$

Dacă planul de separație este paralel cu yOz, mediul cu permeabilitatea μ_1 fiind la dreapta punctului de indice zero, relația care rezultă pentru rețea de discretizare și mediu fără surse este asemănătoare relatiei (6.52):

$$A_0=\frac{1}{4}(A_1\frac{2\nu_1}{\nu_1+\nu_2}+A_2+A_3\frac{2\nu_2}{\nu_1+\nu_2}+A_4) \qquad (6.53)$$

6.2.2.2. METODA INTEGRALEI DE CONTUR

Scanned with OKEN Scanner

Se consideră situaţia din Fig.6.6. În centrele de simetrie ale dreptunghiurilor definite de punctele de potenţial A_1, A_2, A_3, A_4 şi A_0 se iau punctele A, B, C, D, conform cu Fig.6.6.

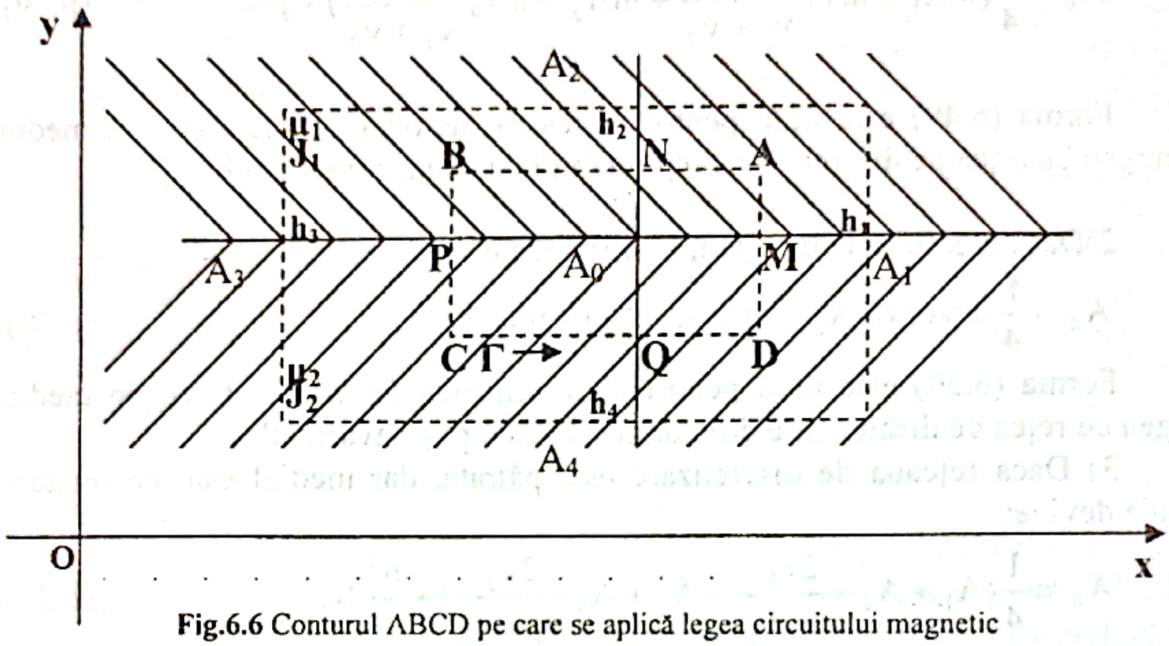


Fig.6.6 Conturul ABCD pe care se aplică legea circuitului magnetic

Aceste puncte definesc în plan un contur dreptunghiular ABCD .
Se scrie legea circuitului magnetic pe acest contur

$$\int_{ABCD} \mathbf{H}\,\mathbf{dl} = \int_{ABCD} \mathbf{J}\,\mathbf{dA} \qquad (6.54)$$

Ţinînd seama de (6.44) rezultă

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y} \quad \text{şi} \quad B_y = -\frac{\partial A}{\partial x} \qquad (6.55)$$

Pe această bază se determină componentele câmpului magnetic pe porţiunile conturului ABCD

$$\mathbf{H}_{AB} = \nu_1 \frac{A_2 - A_0}{h_2}\mathbf{i} \qquad \mathbf{H}_{BP} = \nu_1 \frac{A_3 - A_0}{h_3}\mathbf{j} \qquad \mathbf{H}_{PC} = \nu_2 \frac{A_3 - A_0}{h_3}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{H}_{CD} = \nu_2 \frac{A_0 - A_4}{h_4}\mathbf{i} \qquad \mathbf{H}_{DM} = \nu_2 \frac{A_0 - A_1}{h_1}\mathbf{j} \qquad \mathbf{H}_{MA} = \nu_1 \frac{A_0 - A_1}{h_1}\mathbf{j} \qquad (6.56)$$

Se ţine seama că sensul conturului Γ este cel trigonometric (indicat în figură), că normala la suprafaţa ABCD este deci în sensul axei Oz şi se admite că sensul curentului este în sensul axei Oz. Astfel (6.54) devine

Scanned with OKEN Scanner

$$-\nu_1(A_2-A_0)\frac{h_1+h_3}{2h_2}-\nu_1(A_3-A_0)\frac{h_2}{2h_3}-\nu_2(A_3-A_0)\frac{h_4}{2h_3}+$$
$$\nu_2(A_0-A_4)\frac{h_1+h_3}{2h_4}+\nu_2(A_0-A_1)\frac{h_4}{2h_1}+\nu_1(A_0-A_1)\frac{h_2}{2h_1}= \qquad (6.57)$$
$$=J_1\frac{h_2(h_1+h_3)}{4}+J_2\frac{h_4(h_1+h_3)}{4}$$

După grupări convenabile (6.57) devine identică cu (6.47) şi sunt evident valabile toate particularizările care urmează acestei ultime relaţii.

Metoda numită de noi metoda integralei de contur [1],[2] are avantajul teoretic că evidenţiază fenomenul electromagnetic care stă la baza formei numerice deduse. În plus apare clar delimitată zona de neomogenitate care corespunde acestei relaţii, precum şi zona ocupată de curent ce trebuie luată în considerare.

6.3 METODA MONTE CARLO PENTRU MEDIU NEOMOGEN

6.3.1 ESTIMATORUL STATISTIC PRIMAR

Formula (6.21) este valabilă în cazul în care punctul (i,j) se află pe suprafaţa de separaţie orizontală dintre medii, formula (6.28) şi (6.29) este valabilă în cazul în care punctul (i,j) se află pe suprafaţa de separaţie verticală iar formula (6.23) este valabilă în cazul în care punctul (i,j) se află într-un mediu omogen. Formulele (6.21), (6.28), (6.29) şi (6.23) se pot scrie unificat astfel

$$V_{i,j}=\frac{1}{4}(c_1mV_{i+1,j}+c_2nV_{i,j+1}+c_3mV_{i-1,j}+c_4nV_{i,j-1})+pS_{i,j} \qquad (6.58)$$

În cazul în care punctul (i,j) se află pe suprafaţa de separaţie orizontală, cu mediul de permitivitate ε_1 deasupra

$$c_1=c_3=1, c_2=\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}, c_4=\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \qquad (6.59)$$

În cazul în care punctul (i,j) se află pe suprafaţa de separaţie verticală, cu mediul de permitivitate ε_1 la stânga

$$c_2=c_4=1, c_1=\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}, c_3=\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \qquad (6.60)$$

În cazul în care punctul (i,j) se află într-un mediu omogen

$$c_1=c_2=c_3=c_4=1 \qquad (6.61)$$

Scanned with OKEN Scanner

Relația generală (6.58) se va interpreta probabilistic în spiritul metodei Monte-Carlo.

Se consideră o particulă fictivă care pornește din punctul (i,j) și ajunge cu egală probabilitate $(\frac{1}{4})$ în unul din punctele adiacente (i+1,j), (i,j+1), (i-1,j), (i,j-1).

În funcție de punctul adiacent în care ajunge particula fictivă se atribuie potențialului punctului (i,j) o anumită valoare.

Astfel

$$V_{i,j} = c_1 m V_{i+1,j} + pS_{i,j} \tag{6.62}$$

dacă particula fictivă ajunge în punctul (i+1,j)

$$V_{i,j} = c_2 n V_{i,j+1} + pS_{i,j} \tag{6.63}$$

dacă particula fictivă ajunge în punctul (i,j+1)

$$V_{i,j} = c_3 m V_{i-1,j} + pS_{i,j} \tag{6.64}$$

dacă particula fictivă ajunge în punctul (i-1,j)

$$V_{i,j} = c_4 n V_{i,j-1} + pS_{i,j} \tag{6.65}$$

dacă particula fictivă ajunge în punctul (i,j-1)

Experimentul se poate simula pe calculator generând numerele pseudoaleatoare $(\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3})$ cu varianta "random 4"și comandând deplasarea particulei fictive respectiv la dreapta, sus, la stânga, jos.

Presupunând că experimentul se repetă de N ori și notând cu N_0 ,N_1 ,N_2 ,N_3 numărul de deplasări ale particulei fictive la dreapta, sus, la stânga, jos se pot scrie N relații de forma (6.62)-(6.65) care adunate dau

$$NV_{i,j} = N_0 c_1 m V_{i+1,j} + N_1 c_2 n V_{i,j+1} + N_2 c_3 m V_{i-1,j} + N_3 c_4 n V_{i,j-1} + \\ + pS_{i,j}(N_0 + N_1 + N_2 + N_3) \tag{6.66}$$

Se ține seama că

$$N_0 + N_1 + N_2 + N_3 = N \tag{6.67}$$

iar pentru N suficient de mare se poate admite că

$$N_0 = N_1 = N_2 = N_3 = \frac{N}{4} \tag{6.68}$$

Ținând seama de ultimele două relații (6.66) devine

$$V_{i,j} = \frac{N_0}{N} c_1 m V_{i+1,j} + \frac{N_1}{N} c_2 n V_{i,j+1} + \frac{N_2}{N} c_3 m V_{i-1,j} + \frac{N_3}{N} c_4 n V_{i,j-1} + \\ + pS_{i,j} \tag{6.69}$$

adică o foarte bună aproximare a relației (6.58), cu atât mai bună cu cât N este mai mare.Relația (6.69) justifică relațiile (6.62)-(6.65).

Scanned with OKEN Scanner

Din analiza relațiilor (6.62)-(6.65) se poate trage o concluzie generală: la deplasarea particulei fictive aflate în punctul (i,j) pe suprafața de separație a mediilor de permitivitate ε_a și ε_b către mediul de permitivitate ε_a valoarea care se atribuie potențialului $V_{i,j}$ este

$$V_{i,j} = \frac{2\varepsilon_a}{\varepsilon_a + \varepsilon_b} mV_{i\pm1,j} + pS_{i,j} \tag{6.70}$$

dacă suprafața de separație este paralelă cu Oy și

$$V_{i,j} = \frac{2\varepsilon_a}{\varepsilon_a + \varepsilon_b} nV_{i,j\pm1} + pS_{i,j} \tag{6.71}$$

dacă suprafața de separație este paralelă cu Ox

Se reaminteşte că în situația de mai sus, dacă densitatea de sarcină în domeniile D_a și D_b sunt respectiv ρ_a și ρ_b atunci expresia funcției de sursă $S_{i,j}$ este

$$S_{i,j} = \frac{\rho_a + \rho_b}{\varepsilon_a + \varepsilon_b} \tag{6.72}$$

Cu aceste chestiuni lămurite se poate trece la determinarea estimatorului statistic primar.

Se consideră situația din Fig.6.7

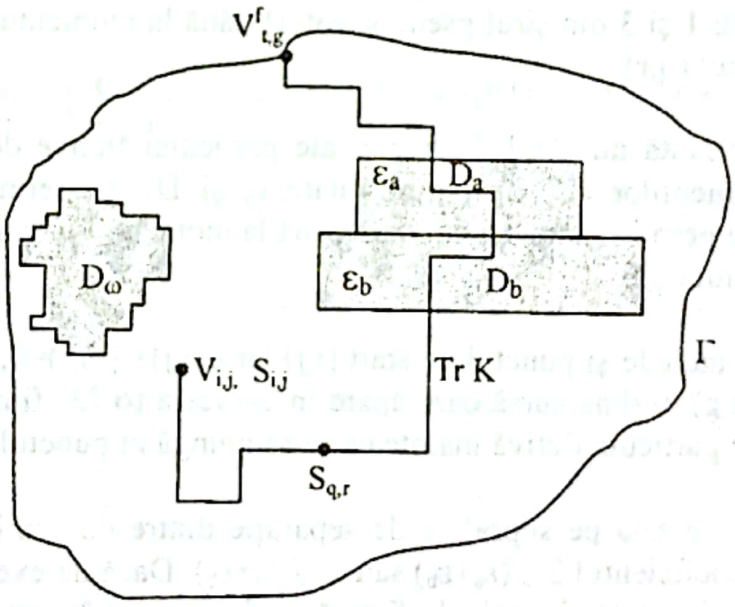


Fig.6.7 Traseu aleator al unei particule fictive într-un domeniu neomogen

Exprimând succesiv potențialele în care ajunge particula fictivă cu relații de forma (6.62)-(6.65) și eliminând pe rând aceste potențiale, ținând seama și de(6.70)și (6.71) se obține o exprimare a potențialului punctului de start $V_{i,j}$ în funcție de potențialul punctului final al traseului (punct aflat pe frontiera Γ) în

Scanned with OKEN Scanner

funcție de valorile densității de sarcină (a funcției sursă $S_{q,r}$) în funcție de pașii rețelei h_x ,h_y și în funcție de permitivitățile electrice ale domeniilor parcurse de traseul aleator TrK

$$V_{i,j} = m^{\alpha(t,g)} n^{\beta(t,g)} \prod_{D_a, D_b \in TrK} \left(\frac{2\varepsilon_a}{\varepsilon_a + \varepsilon_b} \right)^{\gamma(t,g)} V_{t,g}^{f} +$$

$$+ p \sum_{(q,r)\in TrK} m^{\alpha(q,r)} n^{\beta(q,r)} \prod_{D_a, D_b \in TrK} \left(\frac{2\varepsilon_a}{\varepsilon_a + \varepsilon_b} \right)^{\gamma(q,r)} S_{q,r} \qquad (6.73)$$

Expresia (6.73) este estimatorul statistic primar al potențialului în punctul (i.j).

În această expresie s-au introdus funcțiile de punct α, β, γ cu următoarele semnificații

α(q,r) reprezintă numărul de deplasări ale particulei fictive la dreapta și la stânga (sau numărul de cifre 0 și 2 din șirul pseudoaleator) până la momentul în care particula a ajuns în punctul (q,r).

β(q,r) reprezintă numărul de deplasări ale particulei fictive în sus și în jos (sau numărul de cifre 1 și 3 din șirul pseudoaleator) până la momentul în care particula a ajuns în punctul (q,r)

γ(q,r) reprezintă numărul de treceri ale particulei fictive de pe suprafața de separație a domeniilor (D_a de permitivitate ε_a și D_b de permitivitate ε_b) către domeniul D_a de permitivitate ε_a numărate până la momentul în care particula fictivă a ajuns în punctul (q,r).

În TrK se include și punctul de start (i,j) iar α(i,j)= β(i,j)=0, dar nu se include punctul final (t,g), ultima sursă care apare în expresia (6.73) fiind cea din punctul în care s-a aflat particula fictivă înainte ca ea să ajungă în punctul final (t,g).

Dacă sursa $S_{q,r}$ se află pe suprafața de separație dintre domeniile D_a și D_b nu se înmulțește cu coeficientul $2\varepsilon_a/(\varepsilon_a+\varepsilon_b)$ sau $2\varepsilon_b/(\varepsilon_a+\varepsilon_b)$ .Dacă de exemplu suprafața de separație este orizontală și particula fictivă se deplasează în sus, înspre mediul D_a atunci sursa $S_{q,r+1}$ (dacă există) este prima sursă care va avea ca și coeficient pe $2\varepsilon_a/(\varepsilon_a+\varepsilon_b)$.

Demonstrarea relației (6.73) se face prin metoda inducției matematice după numărul de deplasări ale particulei fictive.

Astfel pentru o singură deplasare, (6.73) ia una din formele (6.62)-(6.65) ,deci este verificată.

Scanned with OKEN Scanner

Se presupune că relația (6.73) este adevărată ,dar se admite că $V^f_{t,g}$ nu ar fi un punct de pe conturul Γ, (deci se va nota de acum $V_{t,g}$) și că pentru a ajunge pe Γ traseul TrK mai are nevoie de un pas.
Să admitem, pentru a fixa ideile, că acest pas este spre dreapta deci este comandat de cifra 0 din "random4".
În aceste condiții punctul (t+1,g) este pe conturul Γ și potențialul acestui punct se va nota $V^f_{t+1,g}$ .Se va mai nota cu TrK' noul traseu incluzând și pasul suplimentar spre dreapta .

Raționamentul se face în două situații : 1)mediu omogen și 2)mediu neomogen în jurul punctului (t,g).

1)mediu omogen

În acest caz potențialul $V_{t,g}$ se exprimă cu o relație de forma (6.62) cu $c_1=1$, adică

$$V_{t,g} = mV^f_{t+1,g} + pS_{t,g} \tag{6.74}$$

Se introduce expresia potențialului $V_{t,g}$ dată de (6.74) în relația de demonstrat (6.73) în locul potențialului $V^f_{t,g}$ și se obține

$$V_{i,j} = m^{\alpha(t,g)+1} n^{\beta(t,g)} \prod_{D_a,D_b \in TrK} \left(\frac{2\varepsilon_a}{\varepsilon_a+\varepsilon_b}\right)^{\gamma(t,g)} V^f_{t+1,g} + m^{\alpha(t,g)} n^{\beta(t,g)} \prod_{D_a,D_b \in TrK} \left(\frac{2\varepsilon_a}{\varepsilon_a+\varepsilon_b}\right)^{\gamma(t,g)} pS_{t,g}$$

$$+ p \sum_{(q,r)\in TrK} m^{\alpha(q,r)} n^{\beta(q,r)} \prod_{D_a,D_b \in TrK} \left(\frac{2\varepsilon_a}{\varepsilon_a+\varepsilon_b}\right)^{\gamma(q,r)} S_{q,r} \tag{6.75}$$

În condițiile problemei, (deplasare spre dreapta a particulei fictive)

$$\alpha(t,g)+1 = \alpha(t+1,g) \tag{6.76}$$

și

$$\beta(t,g) = \beta(t+1,g) \tag{6.77}$$

Astfel relația (6.75) devine

$$V_{i,j} = m^{\alpha(t+1,g)} n^{\beta(t+1,g)} \prod_{D_a,D_b \in TrK'} \left(\frac{2\varepsilon_a}{\varepsilon_a+\varepsilon_b}\right)^{\gamma(t,g)} V^f_{t+1,g} +$$

$$+ p \sum_{(q,r)\in TrK'} m^{\alpha(q,r)} n^{\beta(q,r)} \prod_{D_a,D_b \in TrK'} \left(\frac{2\varepsilon_a}{\varepsilon_a+\varepsilon_b}\right)^{\gamma(q,r)} S_{q,r} \tag{6.78}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi astfel (6.73) este demonstrată în caz că în jurul punctului (t,g) mediul este omogen.

2) mediu neomogen

Se presupune că punctul (t,g) se află pe suprafaţa verticală de separaţie a domeniilor D_a şi D_b mediul de permitivitate ε_a fiind la dreapta
În acest caz potenţialul $V_{t,g}$ se exprimă cu o relaţie de forma (6.62)

$$V_{t,g} = m\frac{2\varepsilon_a}{\varepsilon_a + \varepsilon_b} V^f_{t+1,g} + pS_{t,g} \tag{6.79}$$

Se înlocuieşte (6.79) în (6.73), se ţine seama că în condiţiile presupuse

$$\gamma(t,g)+1=\gamma(t+1,g) \tag{6.80}$$

şi având în vedere observaţiile făcute în cazul anterior al mediului omogen relaţia (6.73) devine

$$V_{i,j} = m^{\alpha(t+1,g)} n^{\beta(t+1,g)} \prod_{D_a, D_b \in TrK'} \left(\frac{2\varepsilon_a}{\varepsilon_a + \varepsilon_b}\right)^{\gamma(t+1,g)} V^f_{t+1,g} +$$

$$+ p \sum_{(q,r)\in TrK'} m^{\alpha(q,r)} n^{\beta(q,r)} \prod_{D_a, D_b \in TrK'} \left(\frac{2\varepsilon_a}{\varepsilon_a + \varepsilon_b}\right)^{\gamma(q,r)} S_{q,r} \tag{6.81}$$

Cu aceasta, expresia (6.73) a estimatorului statistic primar este demonstrată.

6.3.2 ESTIMATORUL STATISTIC SECUNDAR AMELIORAT

Estimatorul secundar ameliorat este media aritmetică a estimatorilor statistici primari, medie realizată pentru un număr N foarte mare de trasee aleatoare.

Notând cu $V^{(K)}_{i,j}$ expresia potenţialului obţinută ca estimator statistic primar cu traseul K (notat pe scurt TrK) , cu $V^{f(K)}_{t,g}$ starea absorbantă corespunzătoare traseului TrK se poate exprima potenţialul punctului (i,j) sub forma

$$V_{i,j} = \frac{1}{N}\sum_{K=1}^{N} V^{(K)}_{i,j} \tag{6.82}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau ţinând seama de expresia (6.73) a estimatorului statistic primar

$$V_{i,j}=\frac{1}{N}\sum_{K=1}^{N} m^{\alpha_K(t,g)} n^{\beta_K(t,g)} \prod_{D_a,D_b\in TrK}\left(\frac{2\varepsilon_a}{\varepsilon_a+\varepsilon_b}\right)^{\gamma_K(t,g)} V_{t,g}^{f(K)} +$$

$$+ p\frac{1}{N}\sum_{K=1}^{N}\sum_{(q,r)\in TrK} m^{\alpha_K(q,r)} n^{\beta_K(q,r)} \prod_{D_a,D_b\in TrK}\left(\frac{2\varepsilon_a}{\varepsilon_a+\varepsilon_b}\right)^{\gamma_K(q,r)} S_{q,r} \qquad (6.83)$$

Indicele K al funcţiilor α , β , γ sugerează că funcţiile iau valori diferite în acelaşi punct în funcţie de traseul la care se referă.

Estimatorul statistic secundar ameliorat dat de formula (6.83) serveşte la determinarea potenţialului în problema analizei câmpului electrostatic.

Pentru $h_x=h_y=h$ deci reţea de discretizare pătratică (m=n=1, $p=-h^2/4$);şi $\varepsilon_a=\varepsilon_b$ deci mediu omogen formula estimatorului secundar ameliorat este cunoscută[1].

OBSERVAŢIE Un indicator al erorii din punct de vedere probabilistic este dispersia sau varianţa

$$\sigma^2(V_{i,j})=\frac{1}{N}\sum_{K=1}^{N}(V_{i,j}^{(K)})^2-\left(\frac{1}{N}\sum_{K=1}^{N}V_{i,j}^{(K)}\right)^2 \qquad (6.84)$$

Conform celor demonstrate în [6.11] se poate afirma cu probabilitatea $1-\sigma^2$ că maximul erorii absolute cu care se obţine $V_{i,j}$ cu formula (6.83) este $\frac{1}{\sqrt{N}}$

6.3.3.METODA MONTE-CARLO DE ANALIZĂ PENTRU MEDIU NEOMOGEN ŞI REŢEA DE DISCRETIZARE DREPTUNGHIULARĂ

Modelul fizic se poate considera cel prezentat în Fig.6.8. Se consideră cunoscute valorile potenţialului în punctele conturului Γ (condiţii de tip Dirichlet) $V^f_{t,g}$ Valorile funcţiei de sursă S(q,r) se consideră cunoscute în fiecare punct (q,r) al domeniului D. Se cunoaşte de asemenea localizarea exactă a domeniilor de neomogenitate D_a, D_b...D_ω .

Problema analizei câmpului electrostatic cu metoda Monte–Carlo presupune determinarea potenţialului într-un punct al domeniului D fie $V_{i,j}$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru soluționarea problemei analizei se folosește formula estimatorului statistic secundar stabilită anterior (6.83), care se aplică pe rând pentru toate punctele în care ne interesează valoarea potențialului.

6.3.4 METODA MONTE-CARLO DE SINTEZĂ PENTRU MEDIU NEOMOGEN ŞI REŢEA DE DISCRETIZARE DREPTUNGHIULARĂ

Se consideră domeniul D bidimensional mărginit de conturul Γ.

Problema plană provine dintr-o problemă tridimensională cu simetrie plan paralelă.

Mediul este liniar, neomogen şi izotrop

Se consideră că în domeniul D există r subdomenii D_1 ,D_2 ,...D_r în care permitivitatea este ε_1, ε_2,... ε_r .(Fig. 6.8)

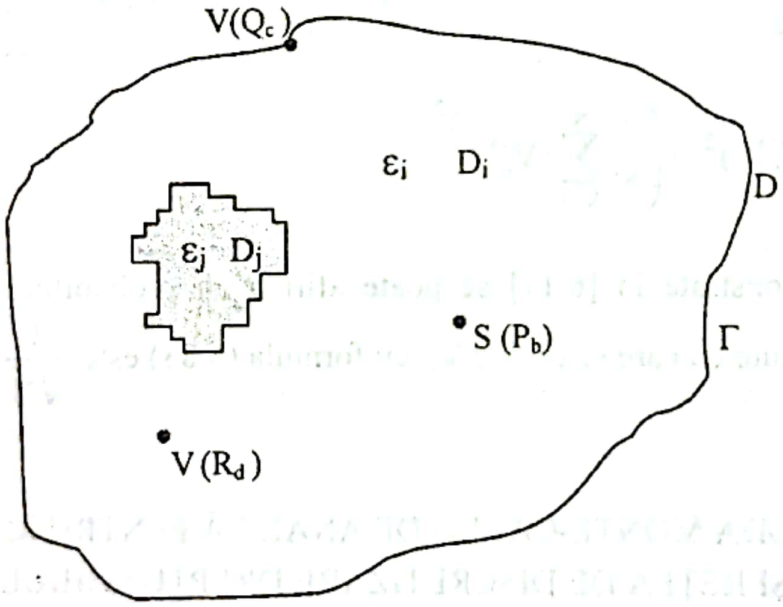


Fig.6.8 Domeniu bidimensional, mediu neomogen, reţea de discretizare dreptunghiulară

Discretizarea domeniului se face printr-o reţea dreptunghiulară de paşi h_x şi h_y

Se admite că conturul Γ trece numai prin noduri ale reţelei de discretizare.

Se admite că frontiera domeniilor de neomogenitate este formată numai de drepte paralele cu axele de coordonate, drepte care trec numai prin noduri ale

Scanned with OKEN Scanner

rețelei de discretizare.Pentru o rețea suficient de fină, aceste cerințe nu restrâng generalitatea aplicabilității problemei.

Potențialul satisface ecuația lui Poisson sau Laplace în domeniul D.

Valorile funcției de sursă $S(P_b)$ se consideră necunoscute în nodurile P_b (pentru b între 1 şi b_1 inclusiv) şi cunoscute în nodurile P_b (pentru b între b_1+1 şi b_2)

Se consideră necunoscute valorile potențialelor pe frontiera Γ în punctele Q_c (pentru c între 1 şi c_1 inclusiv) şi cunoscute în nodurile Q_c (pentru c între c_1+1; şi c_2).

Problema sintezei presupune determinarea celor b_1+c_1 necunoscute, astfel încât în nodurile R_d ale domeniului (pentru d între 1 şi d_1) potențialul să ia nişte valori impuse $V(R_d)$.

Considerând că din nodul R_d de potențial $V(R_d)$ există N_d trasee aleatoare se poate scrie expresia estimatorului statistic secundar corespunzător:

$$V(R_d)=\frac{1}{N_d}\sum_{K=1;c\in[1,c_2]}^{N_d} m^{\alpha_K(Q_c)} n^{\beta_K(Q_c)} \prod_{D_i,D_j\in TrK}\left(\frac{2\varepsilon_i}{\varepsilon_i+\varepsilon_j}\right)^{\gamma_K(Q_c)} V(Q_c)+$$

$$+p\frac{1}{N_d}\sum_{K=1}^{N_d}\sum_{P_b\in TrK,b\in[1,b_2]} m^{\alpha_K(P_b)} n^{\beta_K(P_b)} \prod_{D_i,D_j\in TrK}\left(\frac{2\varepsilon_i}{\varepsilon_i+\varepsilon_j}\right)^{\gamma_K(P_b)} S(P_b) \qquad (6.85)$$

Se scriu d_1 astfel de ecuații.

Rezultă astfel un sistem de d_1 ecuații cu b_1+c_1 necunoscute care se rezolvă cu metode specifice (metoda regularizării sistemelor degenerate, etc.)

BIBLIOGRAFIE la capitolul 6

6.1.Mîndru, Gh., Rădulescu, M.M., *Analiza numerică a câmpului electromagnetic*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1986.

6.2.Hănțilă, F., Demeter, E., *Rezolvarea numerică a problemelor de câmp electromagnetic*, ICM Bucureşti, 1995.

6.3.Târnovean, I., Munteanu, R., Simion, E., *Aplicații ale elementului finit în dinamica sistemelor de măsurare*, Ed. Mediamira, 1996.

6.4.Royer, G.M. *A Monte Carlo procedure for potential theory problems*, IEEE Transactions on microwave theory technic, Vol. 19, No. 10, pp. 19-32, 1985.

Scanned with OKEN Scanner

6.5.Paderta, B., Chvala, F., *Application of Monte Carlo methods to the solution of electrical field on an oblique boundary between two dielectrics*, Acta technica CSAV, Vol.4, No.19, pp.398-423, 1974.

6.6.Micu, D., Vlad, Simona., Micu, Adriana, *Performance of the Monte-Carlo method in inhomogeneous media*, Record of the 11th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, COMPUMAG; Rio de Janeiro, Brazil, nov., 1997.

6.7.Micu, Adriana, Micu, D., Patachi, N., *Le nombre de condition*, Revue roumaine des sciences technique, série E.E, tome 44, vol.2, p.121-134, Bucarest, 1999.

6.8.Micu, Adriana, Micu, D., Patachi, N., *Sur l'inégalité de Wieland et Kantorovitch*, Revue roumaine des sciences technique, série E.E, tome 44, vol.3, p.305-315, Bucarest, 1999.

6.9.Micu, D., Marschalko, R., *Electrostatica*, Ed. Mediamira, 1997, Cluj-Napoca.

6.10.Micu, D., Micu, Adriana, *Application of the Monte-Carlo synthesis numerical method in the case of a rectangular discretization grid* , ISEF, 1993, pp. 179-182, Varşovia, Poland, 1993.

6.11.Micu, D., *Contribuţii la sinteza câmpului electric şi magnetic staţionar*, Teză doctorat, 1993.

6.12.Micu, D., *Numerical synthesis of electrostatic field by Monte-Carlo method*, IEEE, Trans.on magn., Vol. 29, pp.1966-1969, March, 1993.

6.13.Micu, Adriana, *Bazele matematice ale sintezei de proiectare*, referat de doctorat, 1998.

6.14.Munteanu, R., Tudoran, Gh., *Teoria şi practica prelucrării datelor de măsurare*, Ed. Mediamira, 1997.

Scanned with OKEN Scanner

7. SINTEZA ANALITICĂ DE CÂMP ELECTROMAGNETIC

7.1 INTRODUCERE

Bazele sintezei analitice de câmp au fost puse în 1964 de către A. Ţugulea în lucrarea [7.1]. Este important de remarcat că la momentul respectiv conceptul de sinteză era la început, lucrările matematice care au deschis domeniul problemelor inverse erau abia apărute sau în curs de apariţie. Să subliniem că sinteza analitică este o prioritate românească

Metoda presupune parcurgerea unor etape specifice

a)stabilirea modelului fizic al problemei

b)stabilirea modelului matematic (model diferenţial)

c)prelucrarea modelului matematic (cu metoda separării variabilelor în varianta Ţugulea şi cu rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale în varianta sintezei directe)

d)folosirea condiţiilor de sinteză pe parcursul prelucrării modelului matematic cu scopul de a determina constantele ce apar în metoda separării variabilelor ori în rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale.

Ultima etapă este specifică sintezei analitice. Ea presupune implicit o discuţie a rezultatelor (la varianta Ţugulea, în funcţie de numărul de armonici care se iau în considerare [7.2]).

A stabili modelul matematic al unei probleme de sinteză înseamnă a preciza forma de scriere a ecuaţiilor câmpului electromagnetic din cele 12 legi ale electromagnetismului [7.3].

Astfel, aceste legi se pot pune sub forma diferenţială, variaţională sau integrală.

Metodele de rezolvare sunt legate direct de modelul matematic, iar modelul matematic diferenţial permite, după cum am mai amintit, şi aplicarea metodelor analitice de rezolvare.

Metodele analitice sunt precise şi prezintă avantaje incontestabile faţă de metodele numerice, dar şi dezavantajul major că nu se pot aplica decât pentru domenii care sunt în general rezultatul unor aproximări.

7.2 FORMA DIFERENŢIALĂ A ECUAŢIILOR CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC

Modelul matematic diferenţial este bazat pe ecuaţiile de stare, ecuaţiile de evoluţie şi ecuaţiile constitutive.

Mediile se consideră imobile.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile de stare sunt

legea fluxului electric:

$$\mathrm{div}\mathbf{D}=\rho_v \tag{7.1}$$

și legea fluxului magnetic:

$$\mathrm{div}\mathbf{B}=0 \tag{7.2}$$

Ecuațiile de evoluție sunt

legea inducției electromagnetice:

$$\mathrm{rot}\mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t \tag{7.3}$$

și legea circuitului magnetic:

$$\mathrm{rot}\mathbf{H}=\mathbf{J}+\partial\mathbf{D}/\partial t \tag{7.4}$$

precum și legea conservării sarcinii

$$\mathrm{div}\mathbf{J}=-\partial\rho_v/\partial t \tag{7.5}$$

dar în condițiile mediului imobil nu este o ecuație independentă. Într-adevăr, aplicând operatorul divergență in (7.4) se obține:

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\mathbf{H}=\mathrm{div}\mathbf{J}+\partial(\mathrm{div}\mathbf{D})/\partial t \tag{7.6}$$

sau ținând seama de (7.1)

$$0=\mathrm{div}\mathbf{J}+\partial\rho_v/\partial t$$

Rezultă că în condițiile unui mediu imobil, legea conservării sarcinii se deduce din legea circuitului magnetic și din legea fluxului electric [7.4].

Ecuațiile constitutive sunt ecuațiile de legătură:

legea legăturii dintre inducție, intensitate și polarizație:

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}+\mathbf{P}_p \tag{7.7}$$

legea legăturii dintre inducție, intensitate și magnetizație:

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}+\mathbf{B}_{rem} \tag{7.8}$$

și legea lui Ohm:

$$\mathbf{J}=\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{E}_i) \tag{7.9}$$

În cazul general, dacă mediul, caracterizat de permitivitate, permeabilitate și conductivitate este nepermanent, neomogen, neliniar, anizotrop, legile de legătură se scriu sub forma:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t)=\overline{\overline{\varepsilon}}(\mathbf{E},\mathbf{r},t)\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\mathbf{P}_p(\mathbf{r},t)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\overline{\overline{\mu}}(\mathbf{H},\mathbf{r},t)\mathbf{H}(\mathbf{r},t)+\mathbf{B}_{rem}(\mathbf{r},t)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t)=\overline{\overline{\sigma}}(\mathbf{E},\mathbf{r},t)[\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\mathbf{E}_i(\mathbf{r},t)]$$

Scanned with OKEN Scanner

7.3 MODELUL MATEMATIC DIFERENȚIAL EXPRIMAT ÎN FUNCȚIE DE CÂMPUL ELECTRIC E ŞI CÂMPUL MAGNETIC H.

Mediul este considerat izotrop, liniar si omogen. Se deduce:

$\text{rot}\mathbf{E}=-\mu\partial\mathbf{H}/\partial t$
$\text{rot}\mathbf{H}=\sigma\mathbf{E}+\varepsilon\partial\mathbf{E}/\partial t$

din ecuațiile de evoluție (7.3) si (7.4), şi din ecuațiile constitutive (7.7),(7.8),(7.9) admițând că câmpul imprimat, inducția remanentă şi polarizația permanentă se consideră nule.

Din prima ecuație, aplicând rotorul, obținem [7.5] :
$\text{rot rot}\mathbf{E}=-\mu\partial(\text{rot}\mathbf{H})/\partial t$

Înlocuind expresia rotorului în membrul drept se va obține:
$\text{grad div}\mathbf{E}-\Delta\mathbf{E}=-\mu\sigma\partial\mathbf{E}/\partial t-\mu\varepsilon\partial^2\mathbf{E}/\partial t^2$ (7.10)
dar
$\text{div}\mathbf{E}=\rho_v/\varepsilon=0,$
deci (7.10) devine
$\Delta\mathbf{E}=\mu\sigma\partial\mathbf{E}/\partial t+\mu\varepsilon\partial^2\mathbf{E}/\partial t^2$ (7.11)

Şi analog
$\Delta\mathbf{H}=\mu\sigma\partial\mathbf{H}/\partial t+\mu\varepsilon\partial^2\mathbf{H}/\partial t^2$

În medii dielectrice (7.11) devine:
$\Delta\mathbf{E}=\mu\varepsilon\partial^2\mathbf{E}/\partial t^2$ (7.12)

şi analog
$\Delta\mathbf{H}=\mu\varepsilon\partial^2\mathbf{H}/\partial t^2$ (7.13)

În medii conductoare (7.11) devine:
$\Delta\mathbf{E}=\mu\sigma\partial\mathbf{E}/\partial t$ (7.14)

Şi analog
$\Delta\mathbf{H}=\mu\sigma\partial\mathbf{H}/\partial t$
care este ecuația lui Helmholtz sau ecuația difuziei.

Scanned with OKEN Scanner

7.4 MODELUL MATEMATIC DIFERENȚIAL EXPRIMAT ÎN FUNCȚIE DE POTENȚIALUL ELECTRIC SCALAR V ŞI POTENȚIALUL MAGNETIC VECTOR A

Se introduce potențialul magnetic vector **A** [7.6], [7.7], [7.8] pe baza legii fluxului magnetic.

Din div**B**=0 rezultă relația de definiție a potențialului magnetic vector

$$\mathbf{B}=\text{rot}\mathbf{A} \tag{7.15}$$

Folosind relația (7.15) în (7.3) rezultă:

$$\text{rot}\mathbf{E}=-\text{rot}(\partial\mathbf{A}/\partial t) \tag{7.16}$$

sau $\text{rot}(\mathbf{E}+\partial\mathbf{A}/\partial t)=0$

de unde $\mathbf{E}+\partial\mathbf{A}/\partial t=-\text{grad}V$

sau

$$\mathbf{E}=-\text{grad}V-\partial\mathbf{A}/\partial t \tag{7.17}$$

În (7.17) expresia –gradV reprezintă intensitatea câmpului electric coulombian şi $\partial\mathbf{A}/\partial t$ reprezintă intensitatea câmpului electric indus sau componenta coulombiană respectiv solenoidală a câmpului electric.

Neglijând câmpul imprimat în relația (7.9) şi folosind (7.17) se obține:

$$\mathbf{J}=-\sigma\text{grad}V-\sigma\partial\mathbf{A}/\partial t \tag{7.18}$$

unde primul termen este densitatea curenților de aducție iar al doilea termen reprezintă densitatea curenților turbionari.

Din potențialul magnetic vector **A** şi potențialul electric scalar V rezultă univoc (soluție unică) intensitatea **E** a câmpului electric şi inducția **B** a câmpului magnetic.

Dar aceleaşi valori **B** şi **E** rezultă şi din:

$$\mathbf{A}^{\bullet}=\mathbf{A}+\text{grad}\varphi$$

$$V^{\bullet}=V-\partial\varphi/\partial t \tag{7.19}$$

Unicitatea lui **A** şi V presupune impunerea unor condiții asupra potențialului magnetic vector **A** şi asupra potențialului electric scalar V aşa încât funcția arbitrară φ să devină bine definită. O astfel de condiție este pentru potențialul magnetic vector condiția de etalonare:

$$\text{div}\mathbf{A}=f(\mathbf{r},t) \tag{7.20}$$

Evident că şi

$\text{div}\mathbf{A}^{\bullet}=f(\mathbf{r},t)$,

deci

$\text{div}\mathbf{A}^{\bullet}-\text{div}\mathbf{A}=0$

de unde div gradφ=0 sau

Scanned with OKEN Scanner

$\Delta\varphi=0$ (7.21)

De obicei pentru problemele în regim staționar se ia condiția de etalonare Coulomb

$\mathrm{div}\mathbf{A}=f(\mathbf{r},t)=0$ (7.22)

$\Delta\varphi=0$ necesită o condiție suplimentară pe frontieră, de exemplu impunerea componentei normale a lui **A** pe suprafața domeniului Σ:

$\mathbf{n}_\Sigma\,\mathbf{A}=g(\mathbf{r},t) \qquad \mathbf{r}\in\Sigma$ (7.23)

Condiția este echivalentă cu:

$\mathbf{n}_\Sigma(\mathbf{A}^*-\mathbf{A})=\mathbf{n}_\Sigma\,\mathrm{grad}\varphi=\partial\varphi/\partial n_\Sigma=0$

de unde rezultă că φ este o constantă, deci **A** şi V este unic.

7.4.1 SOLUȚIA ANALITICĂ A PROBLEMEI INVERSE A POTENȚIALULUI MAGNETIC VECTOR

În cazul problemelor de sinteză a câmpului magnetic rezolvate prin intermediul potențialului magnetic vector **A** apare frecvent situația următoare: se impune câmpul magnetic **B** într-un anumit domeniu şi se cer condițiile (care pot fi într-o multitudine de variante) în care sunt realizate valorile impuse.

Ecuațiile câmpului fiind în funcție de potențialul magnetic vector **A** apare necesitatea determinării acestei mărimi în funcție de câmpul magnetic **B**.

Aşadar se impune rezolvarea ecuației:

$\mathrm{rot}\mathbf{A}=\mathbf{B}$ (7.24)

Evident că

$\mathrm{div}\mathbf{B}=0$ (7.25)

Fie $\mathbf{A}_0$ o soluție particulară a ecuației (7.24):

$\mathrm{rot}\mathbf{A}_0=\mathbf{B}$ (7.26)

Scăzând ecuațiile (7.24) si (7.26) rezultă:

$\mathrm{rot}(\mathbf{A}-\mathbf{A}_0)=0$ (7.27)

de unde se obține soluția generală a ecuației (7.24):

$\mathbf{A}=\mathbf{A}_0+\mathrm{grad}\,u$

Problema se reduce la a determina o soluție particulară $\mathbf{A}_0$

$\mathbf{A}_0=X\mathbf{i}+Y\mathbf{j}+Z\mathbf{k}$ (7.28)

Considerând că:

$\mathbf{B}=B_x\mathbf{i}+B_y\mathbf{j}+B_z\mathbf{k}$ (7.29)

ecuația vectorială (7.26) se scrie sub forma scalară:

$$\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}=B_x \qquad (7.30)$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = B_y \tag{7.31}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = B_z \tag{7.32}$$

Cum soluția căutată este una particulară, se caută soluția pentru care Z=0. Sistemul de trei ecuații devine:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = -B_x \tag{7.33}$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = B_y \tag{7.34}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = B_z \tag{7.35}$$

Din (7.33) rezultă:

$$Y = -\int_{z_0}^{z} B_x dz + g(x,y) \tag{7.36}$$

Din (7.34) se obține:

$$X = \int_{z_0}^{z} B_y dz + f(x,y) \tag{7.37}$$

Valorile găsite pentru X și Y se înlocuiesc în (7.35):

$$-\int_{z_0}^{z} \frac{\partial B_x}{\partial x} dz - \int_{z_0}^{z} \frac{\partial B_y}{\partial y} dz + \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = B_z \tag{7.38}$$

Se observă că în coordonate carteziene (7.25) ia forma:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \tag{7.39}$$

Folosind (7.39), ecuația (7.38) devine:

$$\int_{z_0}^{z} \frac{\partial B_z}{\partial z} dz + \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = B_z \tag{7.40}$$

Efectuând integrala, rezultă:

$$B_z(x,y,z) - B_z(x,y,z_0) + \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = B_z(x,y,z) \tag{7.41}$$

Soluția căutată fiind particulară se poate considera:

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \tag{7.42}$$

Din (7.41) se determină g(x,y):

$$g(x,y) = \int_{x_0}^{x} B_z(x,y,z_0)dx + h(y) \tag{7.43}$$

Se poate lua h(y)=0 si cu aceasta soluția particulară se scrie:

$$X = \int_{z_0}^{z} B_y(x,y,z)dz \tag{7.44}$$

$$Y = -\int_{z_0}^{z} B_x(x,y,z)dz + \int_{x_0}^{x} B_z(x,y,z_0)dx \tag{7.45}$$

$$Z=0 \tag{7.46}$$

Soluția generală a ecuației (7.24) este:

$$A_x = X + \frac{\partial u}{\partial x} \tag{7.47}$$

$$A_y = Y + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{7.48}$$

$$A_z = \frac{\partial u}{\partial z} \tag{7.49}$$

Soluția generală a ecuației (7.24) se scrie explicit:

$$A_x = \int_{z_0}^{z} B_y(x,y,z)dz + \frac{\partial u}{\partial x} \tag{7.50}$$

$$A_y = -\int_{z_0}^{z} B_x(x,y,z)dz + \int_{x_0}^{x} B_z(x,y,z_0)dx + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{7.51}$$

$$A_z = \frac{\partial u}{\partial z} \tag{7.52}$$

7.4.2.MODELUL MATEMATIC DIFERENȚIAL ÎN REGIM ELECTRIC STATIC

Legea inducției electromagnetice în regim static are forma:

$$\text{rot}E=0 \tag{7.53}$$

de unde rezultă așa numita teoremă a potențialului electrostatic

$$E=-\text{grad}V \tag{7.54}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din legea fluxului electric şi legea de legătură dintre inducţie, intensitate şi polarizaţie avem:

$$\mathrm{div}(\underline{\underline{\varepsilon}}\,\mathbf{E}+\mathbf{P}_p)=\rho_v \qquad (7.55)$$

Cu ajutorul ecuaţiilor (7.54) şi (7.55) ajungem la următoarea ecuaţie:

$$\mathrm{div}(\underline{\underline{\varepsilon}}\,\mathrm{grad}V)=\mathrm{div}\mathbf{P}_p-\rho_v$$

În final se obţine:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}\,\Delta V+\mathrm{grad}\,\underline{\underline{\varepsilon}}\;\mathrm{grad}V=\mathrm{div}\mathbf{P}_p-\rho_v \qquad (7.56)$$

relaţie valabilă în mediu anizotrop, neliniar, neomogen, nepermanent.

Pentru ca problema de analiză să aibă soluţie unică trebuie cunoscute:

a) condiţiile de frontieră, care se pot da în trei variante

1)$V(\mathbf{r})/\Sigma$ sau $V(x,y,z)$ cu $x,y,z \in \Sigma$

care este condiţia lui Dirichlet

2)$D_n/\Sigma=-\varepsilon\,\mathrm{grad}\,V/\Sigma$ sau $D_n(x,y,z)=f(x,y,z)$ cu $x,y,z\in\Sigma$

care este condiţia Neumann. D_n este componenta normală a inducţiei electrice.

3)condiţia lui Dirichlet (Σ_1) + condiţia lui Neumann (Σ_2), $\Sigma_1\cup\Sigma_2=\Sigma$, cunoscută sub numele de condiţia lui Robin.

b) condiţiile de trecere la suprafeţele de discontinuitate

1) $\mathbf{n}_{12}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)=0$

adică componentele tangenţiale ale câmpului electric se conservă la trecerea printr-o suprafaţă de discontinuitate

2) $\mathbf{n}_{12}\,(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)=\rho_s$

adică saltul componentei normale a inducţiei electrice la trecerea printr-o suprafaţă de discontinuitate este egal cu densitatea superficială a sarcinii electrice de pe suprafaţa respectivă. Aşadar această mărime trebuie cunoscută

c)condiţiile de surse

A cunoaşte condiţiile de surse înseamnă a avea valorile densităţii de sarcină de volum ρ_v de suprafaţă ρ_s precum şi polarizaţia permanentă $\mathbf{P}_p$.

În cazul sintezei o parte din condiţiile a), b), c) pot constitui mărimi impuse sau date, iar o parte pot fi mărimi necunoscute.

Cazuri particulare:

1) Mediu izotrop, liniar, neomogen, fără $\mathbf{P}_p$.

$$\varepsilon\Delta V+\mathrm{grad}\varepsilon\,\mathrm{grad}V=-\rho_v \qquad (7.57)$$

2) Mediu izotrop, liniar, omogen, fără $\mathbf{P}_p$.

Scanned with OKEN Scanner

$$\varepsilon \Delta V = -\rho_v \text{ sau } \Delta V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon} \quad (7.58)$$

care este chiar ecuația lui Poisson.

3) Mediul este izotrop, liniar, omogen, fără $\mathbf{P}_p$ și fără surse.

$$\varepsilon \Delta V = 0 \Rightarrow \Delta V = 0 \quad (7.59)$$

care este ecuația Laplace

7.4.3.MODELUL MATEMATIC DIFERENȚIAL ÎN REGIM MAGNETIC STATIC

În cazul câmpului magnetic în regim static avem:

$$\text{rot}\mathbf{H}=0 \quad (7.60)$$

$$\text{div}\mathbf{B}=0,$$

de unde

$$\mathbf{B}=\text{rot}\mathbf{A} \quad (7.61)$$

Legea legăturii devine

$$\mathbf{H}=\overline{\overline{\nu}}(\mathbf{B}-\mathbf{B}_{rem})=\overline{\overline{\nu}}(\text{rot}\mathbf{A}-\mathbf{B}_{rem}) \quad (7.62)$$

Din (7.60) și (7.62)rezultă:

$$\text{rot}\left[\overline{\overline{\nu}}(\text{rot}\mathbf{A}-\mathbf{B}_{rem})\right]=0 \quad (7.63)$$

Mediul este considerat în cazul general, adică este anizotrop, neliniar, neomogen, cu existența inducției remanente.

Condițiile de unicitate sunt alcătuite din următoarele condiții:

a)condițiile de frontieră, care se pot da în două variante

1) $\mathbf{n}_\Sigma \times \mathbf{H}(\mathbf{r})/\Sigma$ sau $\mathbf{H}_t(x,y,z)$ cu $x,y,z \in \Sigma$

adică se cunoaşte componenta tangențială a câmpului magnetic pe suprafața domeniului Σ.

2) $\mathbf{n}_\Sigma \times \mathbf{A}(\mathbf{r})/\Sigma$ sau $\mathbf{A}_t(x,y,z)$ cu $x,y,z \in \Sigma$

adică se cunoaşte componenta tangențială a potențialului magnetic vector pe suprafața domeniului Σ.

b)condițiile de trecere la suprafețele de discontinuitate

1) $\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=0$

adică componentele tangențiale ale câmpului electric se conservă la trecerea printr-o suprafață de discontinuitate .

2) $\mathbf{n}_{12}(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)=0$

Scanned with OKEN Scanner

adică saltul componentei normale a inducției magnetice la trecerea printr-o suprafață de discontinuitate este nul. Dacă se alege condiția de etalonare (7.22), cum se obișnuiește în acest regim, atunci la trecerea printr-o suprafață de separație a proprietăților magnetice se conservă de asemenea componenta normală a potențialului magnetic vector.

Cu ajutorul relației (7.62) condițiile de trecere se transferă asupra potențialului magnetic vector **A** [7.3].

c)condițiile de surse

A cunoaşte condițiile de surse înseamnă a avea valorile inducției remanente $\mathbf{B}_{rem}$.

În cazul sintezei o parte din condițiile a), b), c) pot constitui mărimi impuse sau date, iar o parte pot fi mărimi necunoscute.

Cazuri particulare:

1) Mediu izotrop, liniar, neomogen cu inducție remanentă. Din (7.63) se obține:

$$\nu(\text{grad div}\mathbf{A}-\Delta\mathbf{A})+\text{grad}\,\nu\times\text{rot}\mathbf{A}=\nu\,\text{rot}\mathbf{B}_{rem}+\text{grad}\,\nu\times\mathbf{B}_{rem} \qquad (7.64)$$

2) Mediu izotrop, liniar, neomogen, fără inducție remanentă, cu condiție de etalonare Coulomb

$$\nu\,\Delta\mathbf{A}-\text{grad}\,\nu\times\text{rot}\mathbf{A}=0 \qquad (7.65)$$

3) Mediu izotrop, liniar, omogen, fără inducție remanentă, cu condiție de etalonare Coulomb

$$\Delta\mathbf{A}=0$$

7.4.4.MODELUL MATEMATIC DIFERENȚIAL ÎN REGIM ELECTRIC STAȚIONAR

În cazul regimului staționar de tip electric sunt valabile ecuațiile:

$$\text{rot}\mathbf{E}=0 \qquad (7.66)$$

de unde $\mathbf{E}=-\text{grad}\,V$

$$\text{div}\mathbf{J}=0 \qquad (7.67)$$

$$\mathbf{J}=\bar{\bar{\sigma}}(\mathbf{E}+\mathbf{E}_i) \qquad (7.68)$$

Aceste ecuații duc la:

$$\text{div}[\bar{\bar{\sigma}}(\mathbf{E}+\mathbf{E}_i)]=0$$

sau

$$\text{div}[\bar{\bar{\sigma}}(\text{grad}\,V)]=\text{div}(\bar{\bar{\sigma}}\mathbf{E}_i) \qquad (7.69)$$

Condițiile de unicitate ale câmpului sunt:

Scanned with OKEN Scanner

a)Condiţii de frontieră şi anume:

1)$V(\mathbf{r})/\Sigma$ sau $V(x,y,z)$ cu $x,y,z \in \Sigma$
care este condiţia lui Dirichlet
2)J_n/Σ sau $J_n(x,y,z)=f(x,y,z)$ cu $x,y,z\in\Sigma$
care este condiţia Neumann. J_n este componenta normală a densităţii de curent.
3)condiţia lui Dirichlet (Σ_1) + condiţia lui Neumann (Σ_2), $\Sigma_1\cup\Sigma_2=\Sigma$, cunoscută sub numele de condiţia lui Robin.

b)condiţiile de trecere la suprafeţele de discontinuitate

1) $\mathbf{n}_{12}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)=0$
adică componentele tangenţiale ale câmpului electric se conservă la trecerea printr-o suprafaţă de discontinuitate
2) $\mathbf{n}_{12}\,(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)=\rho_s$
adică saltul componentei normale a inducţiei electrice la trecerea printr-o suprafaţă de discontinuitate este egal cu densitatea superficială a sarcinii electrice de pe suprafaţa respectivă. Aşadar această mărime trebuie cunoscută
3) $\mathbf{n}_{12}\,(\mathbf{J}_2-\mathbf{J}_1)=0$
adică componentele normale ale inducţiei electrice se conservă la trecerea printr-o suprafaţă de separaţie a proprietăţilor electrice.

c)condiţiile de surse
A cunoaşte condiţiile de surse înseamnă a avea valorile câmpului electric imprimat $\mathbf{E}_i$ în fiecare punct al domeniului.

În cazul sintezei o parte din condiţiile a), b), c) pot constitui mărimi impuse sau date, iar o parte pot fi mărimi necunoscute.

Cazuri particulare:

1) Mediul este izotrop, liniar, neomogen, cu câmp imprimat. În acest caz ecuaţia (7.69) este de forma:

$$\sigma\,\Delta V+\text{grad}\sigma\,\text{grad}V=\sigma\,\text{div}\mathbf{E}_i+\mathbf{E}_i\,\text{grad}\sigma \qquad (7.70)$$

2) Mediul este izotrop, liniar, omogen, cu câmp imprimat. În acest caz (7.70) devine ecuaţie Poisson:

$$\Delta V=\sigma\,\text{div}\mathbf{E}_i \qquad (7.71)$$

3) În cazul unui mediu izotrop, liniar, omogen fără câmp imprimat, se obţine ecuaţia Laplace:

$$\Delta V=0 \qquad (7.72)$$

Scanned with OKEN Scanner

7.4.5 MODELUL MATEMATIC DIFERENȚIAL ÎN REGIM MAGNETIC STAȚIONAR

În cazul câmpului magnetic staționar avem:

$$\mathrm{rot}\mathbf{H}=\mathbf{J} \tag{7.73}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B}=0, \tag{7.74}$$

de unde

$$\mathbf{B}=\mathrm{rot}\mathbf{A} \tag{7.75}$$

Legea legăturii devine

$$\mathbf{H}=\overline{\overline{\nu}}\,(\mathbf{B}-\mathbf{B}_{rem})=\overline{\overline{\nu}}\,(\mathrm{rot}\mathbf{A}-\mathbf{B}_{rem}) \tag{7.76}$$

Din (7.73) și (7.76) avem:

$$\mathrm{rot}\,[\overline{\overline{\nu}}\,(\mathrm{rot}\mathbf{A}-\mathbf{B}_{rem})]=\mathbf{J} \tag{7.77}$$

Mediul este considerat în cazul general, adică este anizotrop, neliniar, neomogen, cu existența inducției remanente.

Condițiile de unicitate sunt alcătuite din următoarele condiții:

a)condițiile de frontieră, care se pot da în două variante

1) $\mathbf{n}_\Sigma \times \mathbf{H}(\mathbf{r})/\Sigma$ sau $\mathbf{H}_t\,(x,y,z)$ cu $x,y,z \in \Sigma$

adică se cunoaşte componenta tangențială a câmpului magnetic pe suprafața domeniului Σ.

2) $\mathbf{n}_\Sigma \times \mathbf{A}(\mathbf{r})/\Sigma$ sau $\mathbf{A}_t\,(x,y,z)$ cu $x,y,z \in \Sigma$

adică se cunoaşte componenta tangențială a potențialului magnetic vector pe suprafața domeniului Σ.

b)condițiile de trecere la suprafețele de discontinuitate

1) $\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\mathbf{J}_s$

adică saltul câmpului magnetic la trecerea printr-o suprafață de discontinuitate este egal cu pânza de curent de pe suprafața respectivă [7.9].

2) $\mathbf{n}_{12}\,(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)=0$

adică saltul componentei normale a inducției magnetice la trecerea printr-o suprafață de discontinuitate este nul. Dacă se alege condiția de etalonare (7.22), cum se obișnuiește în acest regim, atunci la trecerea printr-o suprafață de separație a proprietăților magnetice se conservă și componenta normală a potențialului magnetic vector.

Cu ajutorul relației (7.76) condițiile de trecere se transferă asupra potențialului magnetic vector **A** [7.3].

Scanned with OKEN Scanner

c)condiţiile de surse

A cunoaşte condiţiile de surse înseamnă a avea valorile densităţii curentului electric de conducţie **J**, valorile densităţii pânzei de curent la suprafeţele de discontinuitate $\mathbf{J}_s$ precum şi valorile inducţiei remanente $\mathbf{B}_{rem}$.

Cazuri particulare:

1)Mediu izotrop, liniar, neomogen cu inducţie remanentă. Din (7.77) se obţine:

$$\nu(\text{ grad div}\mathbf{A}-\Delta\mathbf{A}\ )+\text{grad}\ \nu\times\text{rot}\mathbf{A}=\mathbf{J}+\nu\ \text{rot}\mathbf{B}_{rem}+\text{grad}\ \nu\times\mathbf{B}_{rem} \qquad (7.78)$$

2)Mediu izotrop, liniar, neomogen, fără inducţie remanentă, cu condiţie de etalonare Coulomb

$$\nu\,\Delta\mathbf{A}-\text{grad}\ \nu\times\text{rot}\mathbf{A}=\mathbf{J} \qquad (7.79)$$

3)Mediu izotrop, liniar, omogen, fără inducţie remanentă, cu condiţie de etalonare Coulomb, rezultă o ecuaţie de tip Poisson

$$\Delta\mathbf{A}=\mathbf{J} \qquad (7.80)$$

Dacă densitatea de curent este nulă în fiecare punct al domeniului rezultă o ecuaţie de tip Laplace

$$\Delta\mathbf{A}=0 \qquad (7.81)$$

BIBLIOGRAFIE la capitolul 7

7.1.Ţugulea, A., *Câteva exemple de sinteze de câmp magnetic în regim staţionar,* St.cerc.energ.electr., Tom 14, Nr.4, pag.735-744, Bucureşti, 1964.

7.2.Micu, D., *Comparaison entre la méthode de la synthèse analytique Ţugulea et une méthode de synthèse numérique,* Revue roumaine des sciences techniques, série E.E., tome 38, vol.1, p.81-93, Bucarest, 1993.

7.3.Mîndru, Gh., Rădulescu, M.M., *Analiza numerică a câmpului electromagnetic,* Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1986.

7.4.Simion E., Maghiar, T., *Electrotehnica,* Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

7.5.Timotin, A., Hortopan, V., Ifrim, A., Preda, M., *Lecţii de Bazele Electrotehnicii,* , Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1970.

7.6.Ţugulea, A., *Câmpul electromagnetic,* Ed. Tehnică, Bucureşti, 1983.

7.7.Şora, C., *Bazele Electrotehnicii,* Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

7.8.Simonyi, K., *Electrotehnica teoretică,* trad., Ed. Tehnică, Bucureşti, 1974.

7.9.Hănţilă, I.F., Demeter, E., *Rezolvarea numerică a problemelor de câmp electromagnetic*, Ari Press, Bucureşti, 1995.

Scanned with OKEN Scanner

APLICAȚII ALE SINTEZEI DE CÂMP ELECTROMAGNETIC

SINTEZA DE PROIECTARE

8. EXEMPLIFICAREA SINTEZEI DE PROIECTARE PRIN REGULARIZAREA ECUAȚIEI INTEGRALE FREDHOLM DE ORDINUL ÎNTÎI. PROIECTAREA UNUI TRADUCTOR DE POZIȚIE INDUCTIV DE CARACTERISTICĂ IMPUSĂ

Dispozitivele de măsură avute în vedere la primele două capitole aplicative sunt traductoarele de măsură [8.1], [8.2], [8.3], [8.4], [8.5].

În cadrul unui proiect pentru un dispozitiv automat de reprezentări grafice s-a ivit problema de a stabili poziția unei bobine într-un plan, problemă care se reduce la necesitatea de a stabili poziția bobinei respective pe o axă [8.6],[8.7].

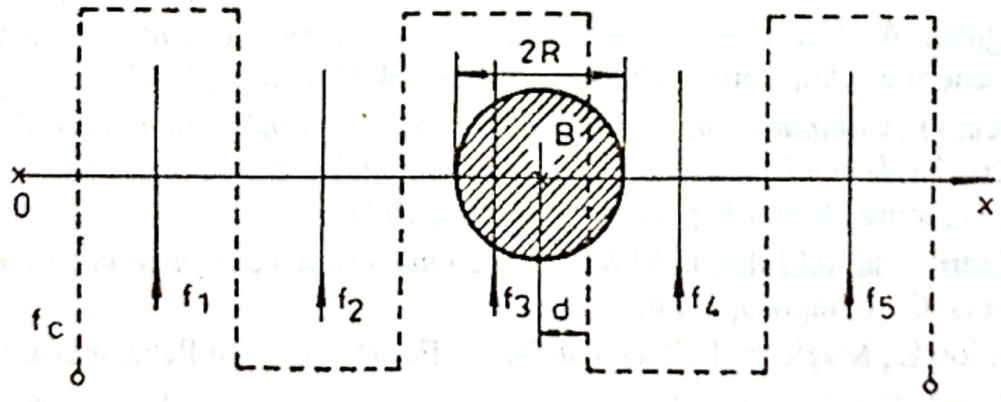


Fig.8.1 Problema practică de a stabili poziția unei bobine pe o axă

Se consideră situația prezentată în Fig.8.1. Alimentând pe rând conductoarele f_1, f_2,... f_5, și urmărind t.e.m. indusă în bobina B, momentul schimbării fazei va fi un indiciu grosier al distanței bobinei B față de reperul 0. Astfel, pentru

Scanned with OKEN Scanner

situaţia din figură, la alimentarea celui de-al patrulea conductor f_4 se va sesiza schimbarea fazei, semn că bobina se află între conductoarele f_3 şi f_4.
Poziţionarea fină urmează să se facă alimentînd conductorul fc şi stabilind distanţa d în funcţie de valoarea t.e.m. induse în bobina B.

Forma tensiunii induse în funcţie de poziţia conductorului fiind nepotrivită conversiei analog-numerice pentru o bobină obişnuită s-a pus problema de a găsi o bobină specială, de anumiţi parametri corespunzător aleşi aşa încît t.e.m. indusă să varieze liniar în funcţie de poziţia firului inductor.

Metodele care se vor aplica în continuare pentru rezolvarea problemei propuse se pot aplica fără nici o modificare pentru a obţine nu numai o caracteristică liniară, ci orice caracteristică impusă continuu sau prin puncte.

8.1 PROIECTAREA BOBINEI TRADUCTOR CU SECŢIUNE DREPTUNGHIULARĂ VARIABILĂ PE ETAJE

Se consideră situaţia din Fig 8.2 în care s-a prezenta o singură spiră din bobină şi anume o spiră din cele situate în etajul de la înălţimea s, avînd una din dimensiuni 2R fixă, iar cealaltă 2z(s) care se cere a se determina în procesul sintezei, astfel încât tensiunea electromotoare (t.e.m.) totală indusă în bobină să varieze liniar în funcţie de distanţa x la care se află dispus firul conductor.

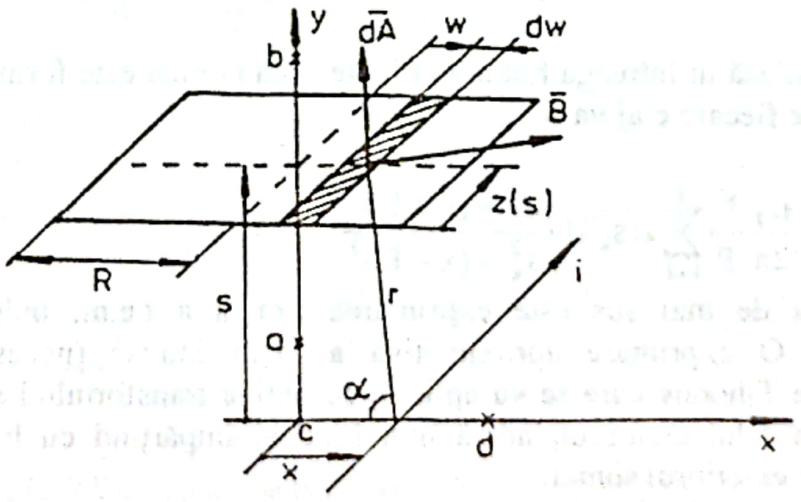


Fig.8.2 Spiră din etajul de la înălţimea s a cărei latură z(s) trebuie aflată

Scanned with OKEN Scanner

8.1.1. .STABILIREA ECUAȚIEI INTEGRALE FREDHOLM

Cu notațiile din figură se calculează tensiunea indusă în bobină în etape care se prezintă în continuare.

Cu ajutorul expresiei scalare a inducției magnetice create la distanța r de firul conductor parcurs de curentul i :

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi \cdot r} \tag{8.1}$$

se calculează fluxul elementar corespunzător suprafeței haşurate :

$$d\phi = BdA\cos\alpha = \frac{\mu_0 i}{\pi} z(s)\frac{x-w}{r^2}dw \tag{8.2}$$

Fluxul corespunzător suprafeței spirei este:

$$\phi = \int_{-R}^{R} \frac{\mu_0 i}{\pi} z(s)\frac{x-w}{s^2+(x-w)^2}dw = \frac{\mu_0 i}{2\pi} z(s)\ln\frac{s^2+(x+R)^2}{s^2+(x-R)^2} \tag{8.3}$$

T.e.m indusă corespunzătoare acestei spire se calculează uşor:

$$e_i = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{di}{dt}\frac{\mu_0}{2\pi} z(s)\ln\frac{s_k^2+(x+R)^2}{s_k^2+(x-R)^2} \tag{8.4}$$

T.e.m indusă în întreaga bobină în ipoteza că bobina este formată din p etaje cu N/p spire pe fiecare etaj va fi:

$$e(x) = -\frac{di}{dt}\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{N}{P}\sum_{k=1}^{p} z(s_k)\ln\frac{s_k^2+(x+R)^2}{s_k^2+(x-R)^2} \tag{8.5}$$

Expresia de mai sus este exprimarea exactă a t.e.m. induse în condițiile problemei. O exprimare aproximativă a t.e.m induse (necesară metodei de regularizare Tihonov care se va aplica) se obține transformînd suma din (8.5) în integrală în felul cunoscut, adică înmulțind şi împărțind cu b-a/p în interiorul respectiv în exteriorul sumei:

$$e(x) = -\frac{di}{dt}\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{N}{p}\frac{p}{b-a}\sum_{k=1}^{p} z(s_k)\ln\frac{s_k^2+(x+R)^2}{s_k^2+(x-R)^2}\frac{b-a}{p} \tag{8.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde se obține forma integrală :

$$e(x) = -\frac{di}{dt}\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{N}{b-a}\int_a^b z(s)\ln\frac{s^2+(x+R)^2}{s^2+(x-R)^2}ds \qquad (8.7)$$

dacă înfăşurarea se execută continuu pe înălțimea bobinei, etajele nefiind clar delimitate (situație mai apropiată de cazul ideal) atunci (8.7) redă mai fidel t.e.m indusă în bobină decît (8.5).

Se ia $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/2)$; I = 0.11A; f = 10^3 Hz; N = 300sp; a = 4mm; b = 24mm; R = 20mm; c = 0; d = 20mm.

Se trece de la forma instantanee din (8.7) la valori efective, notînd valoarea efectivă corespunzătoare tensiunii sinusoidale e(x) cu u(x)

$$u(x) = \int_a^b z(s)[f.I.\mu_0\frac{N}{b-a}\ln\frac{s^2+(x+R)^2}{s^2+(x-R)^2}]ds \qquad (8.8)$$

Prin această trecere la valori efective u(x) nu depinde de timp deci sinteza se face cu metode specifice regimului staționar, motiv pentru care această aplicație, aparent de regim cvasistaționar, se include totuşi în sinteza câmpului magnetic staționar.

Se ține seama că :

$$f.I.\mu_0\frac{N}{b-a} = 10^3\cdot 0{,}11\cdot 4\pi 10^{-7}\frac{300}{20\cdot 10^{-3}} = 2{,}094 \qquad (8.9)$$

şi u(x) = 0,1x [mV]

x se exprimă în [mm].

Ecuația (8.8) reprezintă o ecuație integrală Fredholm de speța întîi avînd nucleul:

$$K(x,s) = 2{,}094\cdot 10^3\cdot\ln\frac{s^2+(x+20)^2}{s^2+(x-20)^2} \qquad (8.10)$$

Rezultă forma tipică de scriere a ecuației (8.8):

$$u(x) = \int_a^b z(s)\cdot K(x,s)\cdot ds \qquad (8.11)$$

Aplicînd algoritmul de regularizare Tihonov sub forma prezentată în capitolul 2.2 se ajunge la ecuația (8.12):

Scanned with OKEN Scanner

$$\int_a^b \int_c^d K(x,s)\cdot K(x,t)\cdot z(t)dxdt - \int_c^d K(x,s)\cdot u(x)\cdot dx + \alpha\cdot q_0(s)\cdot z(s) -$$

$$-\alpha\cdot q_1'(s)\cdot z'(s) - \alpha\cdot q_1(s)\cdot z''(s) = 0 \qquad (8.12)$$

Se alege stabilizatorul cu coeficienți constanți, deci $q_0(s) = q_1(s) = 1$.

8.1.2. FORMA DISCRETIZATĂ A ECUAȚIEI INTEGRALE FREDHOLM

Ecuația (8.12) se rezolvă numeric, derivatele exprimîndu-se cu metoda diferențelor finite. Toate dimensiunile se vor exprima în mm.

Domeniul lui s, intervalul [4,24] se împarte în n = 10 părți.

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{24-4}{10} = 2 \qquad (8.13)$$

Diviziunea intervalului este dată de $s_j = a + (j-0{,}5)h$, adică $s_j = 3 + 2j$;(j =1÷10), iar $z_j = z(s_j)$.

Domeniul lui x, intervalul [0, 20] se împarte în același număr de părți, n=10.

$$h_1 = \frac{d-c}{n} = \frac{20-0}{10} = 2 \qquad (8.14)$$

Diviziunea intervalului este dată de $x_i = h_1 i$, adică x_i =2i, (i = 1÷10) și corespunzător

$u_i = u(x_i) = 0{,}1\cdot x_i$

Ecuația (8.12) se transformă conform cu (2.45) într-un sistem de n=10 ecuații de forma :

$$z_{j-1}\left(-\frac{\alpha}{h^2}\right) + z_j\left(\alpha + \frac{2\alpha}{h^2}\right) + z_{j-1}\left(-\frac{\alpha}{h^2}\right) + h\cdot h_1 \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} K_{ij}K_{il}z_l =$$

$$= h_1 \sum_{i=1}^{n} K_{ij}u_i \qquad (8.15)$$

(j = 1÷10); $z_0 = z_1$ și $z_{11} = z_{10}$ (conform celor arătate la capitolul 2.2.4)

Scanned with OKEN Scanner

S-a conceput un program pentru soluționarea sistemului (8.15) pentru diferite valori ale parametrului de regularizare α.

După aflarea soluțiilor $z_j (j = 1 \div 10)$ corespunzătoare unui α fixat se calculează valorile tensiunilor induse care se obțin cu aceste soluții :

$$v_i = \sum_{j=1}^{10} K_{ij} z_j h \quad (i = 1 \div 10) \tag{8.16}$$

Pentru fiecare α fixat se calculează eroarea corespunzătoare cu formula [8.3]:

$$\varepsilon = \left[\sum_{i=1}^{10} (v_i - u_i)^2 \right]^{1/2} \tag{8.17}$$

Valorile parametrului de regularizare au fost luate în progresie geometrică cu rația 10^{-1}, constatîndu-se micșorarea erorii ε odată cu parametrul de regularizare α.

Programul a fost conceput astfel încît să conducă la aflarea lui α care dă o eroare minimă.

Astfel în cazul în care $\varepsilon(10^{-i}) < \varepsilon(10^{-i-1})$ intervalul $(10^{-i-1}, 10^{-i})$ a fost divizat în 10 părți egale, reluându-se determinarea erorii și comparațiile pentru fiecare din aceste valori ale lui α.

Eroarea minimă $\varepsilon = 3{,}02 \cdot 10^{-9}$ s-a obținut pe un palier: $\alpha \in [2{,}96 \cdot 10^{-16} \div 4 \cdot 10^{-16}]$.

La micșorarea în continuare a lui α eroarea începe să crească, pentru $\alpha = 0$, rezultă eroarea $\varepsilon(0) = 2{,}76 \cdot 10^{-5}$, care corespunde pseudosoluției normale.

Prezintă interes interpretarea rezultatelor pentru valoarea parametrului de regularizare de pe palier $\alpha = 2{,}96 \cdot 10^{-16}$, care dă valoarea minimă a erorii.

Valorile corespunzătoare pentru z (în mm) sînt date în Tabel 8.1:

Tabel 8.1

$z_1 = 46{,}486$	$z_2 = -795{,}544$	$z_3 = 5062{,}574$	$z_4 = -14186{,}966$
$z_5 = 14101{,}187$	$z_6 = 6386{,}654$	$z_7 = -12674{,}514$	$z_8 = -5005{,}716$
$z_9 = -288{,}105$	$z_{10} = 8306{,}941$		

Valorile negative arată că la etajul corespunzător cele N/p = 30 spire au sens de înfășurare diferit.

Valorile tensiunii induse sunt extrem de precise pentru aceste valori : v_i diferă de u_i numai de la a cincea zecimală, eroarea relativă maximă fiind de 0,015 %.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultatele sunt date în Tabel 8.2, unde pe linia corespunzătoare mărimii u_i apar cele 10 valori impuse prin proiectarea optimală iar pe linia următoare corespunzătoare mărimii v_i apar valorile tensiunii care s-ar obține cu bobina proiectată conform datelor din Tabel 8.1.

Tabel 8.2

i	1	2	3	4	5
u_i	0,2	0,4	0,6	0,8	1
v_i	0,20003	0,40001	0,59997	0,79997	1,00001
v_i'	0,20367	0,40576	0,60505	0,80119	0,99541

i	6	7	8	9	10
u_i	1,2	1,4	1,6	1,8	2
v_i	1,20000	1,39999	1,59999	1,80000	1,99999
v_i'	1,19155	1,39601	1,61293	1,82522	1,97220

Intervine acum în discuție un aspect specific sintezei de cîmp cu această metodă alegerea parametrului de regularizare este în majoritatea cazurilor rezultatul unui compromis între deziderатul de precizie cu care este obținută soluția şi posibilitatea practică de a realiza condiția cerută (aşa numitul deziderat de stabilitate). Se observă că soluția cu dimensiunile din Tabel 8.1 este imposibil de realizat practic.

Se poate alege de exemplu soluția pentru $\alpha = 10^{-8}$, care duce la cele zece valori ale tensiunii induse v_i' date în Tabel. 8.2. Norma vectorului eroare este $\varepsilon = 1{,}75 \cdot 10^{-3}$ iar eroarea relativă maximă cu care se obține tensiunea indusă este 1,83%. Dimensiunile bobinei cu valorile z în mm sunt prezentate în Tabel 8.3 :

Tabel 8.3

$z_1 = 148{,}9$	$z_2 = 61{,}9$	$z_3 = -102{,}8$	$z_4 = -75{,}7$	$z_5 = -31{,}8$
$z_6 = 12{,}8$	$z_7 = 53{,}6$	$z_8 = 89{,}1$	$z_9 = 118{,}6$	$z_{10} = 139{,}7$

Aceste valori duc la o bobină de dimensiuni acceptabile.
In Fig. 8.3 este prezentată o secțiune a acestei bobine cu etajele desenate de sus în jos, la scara ½ cu dimensiunile în mm date în desen . Dimensiunea care nu apare în desen (în adîncime) este 2R = 40.

Scanned with OKEN Scanner

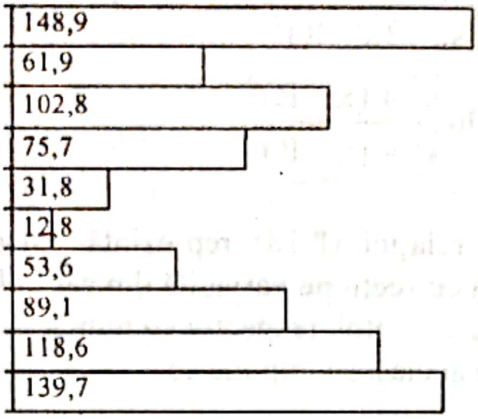


Fig.8.3 Dimensiunile celor zece etaje ale bobinei traductor cu caracteristică liniară

8.2 PROIECTAREA BOBINEI TRADUCTOR CU SECȚIUNE PĂTRATĂ DATĂ CU UN NUMĂR DE SPIRE VARIABIL PE ETAJE

Bobina realizată prin sinteză în capitolul 8.1 prezintă avantajul că numărul de spire este acelaşi pe fiecare etaj şi că acest număr fiind relativ mic, 30 spire, înfăşurarea respectivă nu modifică sensibil dimensiunea secțiunii rezultate din calcul.

Pe de altă parte, bobina realizată permite determinarea poziției numai pe o singură axă.

Acest capitol îşi propune să înlăture acest dezavantaj, astfel încât rezultatele obținute la capitolul 8.1 să poată fi folosite pentru a construi bobine care să permită poziționări pe ambele axe.

Primul pas va fi acela de a considera o bobină simetrică față de cele două axe, deci cu secțiune pătrată, ceea ce implică a se considera z(s) = R în desenul din Fig.8.2.

Pentru a obține cu acest tip de bobină o caracteristică (tensiunea indusă-poziție fir inductor) impusă se va lua pe fiecare etaj un număr de spire diferit, N_k, potrivit ales astfel încât ceea ce la capitolul 8.1 rezulta din dimensiunea variabilă z_k aici să rezulte din numărul de spire N_k.

Legătura dintre z_k determinat la capitolul 8.1 şi N_k se face cu relația (8.5) care sugerează pe baza celor arătate mai sus următoarea egalitate:

Scanned with OKEN Scanner

$$-\frac{di}{dt}\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{N}{p}\sum_{k=1}^{p} z_k \ln\frac{s_k^2+(x+R)^2}{s_k^2+(x-R)^2} = \\ =-\frac{di}{dt}\frac{\mu_0}{2\pi}R\sum_{k=1}^{p} N_k \ln\frac{s_k^2+(x+R)^2}{s_k^2+(x-R)^2} \tag{8.18}$$

Fiecare din membrii relației (8.18) reprezintă tensiunea indusă în bobină, membrul stâng în varianta cu secțiune variabilă din capitolul 8.1, iar membrul drept în varianta abordată în acest capitol, respectiv cu număr de spire variabil pe etaje.

Pentru ca efectul să fie același se impune ca:

$$\frac{N}{p}z_k = RN_k \tag{2.19}$$

pentru fiecare k, deci:

$$N_k = \frac{N}{pR}z_k \tag{2.20}$$

Pentru datele numerice considerate relația este:

$$N_k = \frac{300}{10\times 20}z_k \quad \text{adică} \quad N_k = \frac{3}{2}z_k \tag{2.21}$$

Problema realizabilității practice a unei astfel de bobine se transferă pe alt plan decât la capitolul 8.1.

În această situație dificultatea care apare este legată de modificarea dimensiunii etajului prin grosimea înfășurării, în cazul în care N_k ia valori prea mari, astfel încât la realizarea practică erorile ce apar din această cauză, erori neprevăzute în studiul teoretic, să fie destul de mari.

Un calcul simplu arată că un număr de 50 de spire mărește dimensiunea secțiunii cu 1 mm, corespunzător unei înălțimi de etaje de h = 2mm.

Se face observația că dacă se modifică scara dimensiunilor, acest impediment se atenuează, adică dacă bobina are 20 cm înălțime și 40x40 cm^2 secțiune, atunci o creștere a dimensiunii secțiunii cu 1 mm este realizată de un număr de 500 spire.

Rezultă că varianta prezentată la acest punct este utilă în cazul unor dimensiuni judicios alese.

Este evident că fiecare din soluțiile găsite la capitolul anterior are un corespondent în varianta cu număr diferit de spire pe etaj.

Se vor prezenta pentru exemplificare și comparație cele două situații de la capitolul 8.1. Primul caz este cazul ideal pentru $\alpha_0 = 2{,}96\cdot 10^{-16}$ care dă eroarea minimă

$\varepsilon_{min} = 3{,}02*10^{-9}$ cu o eroare relativă maximă de 0,015% și care se realizează pentru valori ale numărului de spire pe etaj prezentate în Tabel 8.4:

Scanned with OKEN Scanner

Tabel 8.4

$N_1 = 31$	$N_2 = -530$	$N_3 = 3375$	$N_4 = -9458$	$N_5 = 9401$
$N_6 = 4258$	$N_7 = -8432$	$N_8 = -3337$	$N_9 = -192$	$N_{10} = 5538$

Al doilea caz, pentru $\alpha = 10^{-8}$, care dă eroarea $\varepsilon = 1{,}75 \cdot 10^{-3}$ cu o eroare relativă maximă de 1,83% se realizează pentru numerele de spire din Tabel 8.5:

Tabel 8.5

$N_1 = 99$	$N_2 = -41$	$N_3 = -69$	$N_4 = -50$	$N_5 = -21$
$N_6 = 9$	$N_7 = 36$	$N_8 = 59$	$N_9 = 79$	$N_{10} = 93$

Se observă că prima soluție prezentată (Tabel 8.4), deşi duce la erori foarte mici nu este realizabilă nici în această variantă pentru că grosimea înfăşurării (de maxim 189 mm) deformează complet dimensiunea 2R = 80 mm.

În schimb a doua soluție (Tabel 8.5), rezultată din varianta propusă la capitolul 8.1 ca realizabilă practic (Fig.8.3) este acceptabilă, ea duce la grosimi ale înfăşurării de mai puțin de 2 mm pe fiecare etaj.

BIBLIOGRAFIE la capitolul 8

8.1.Dragomir, N., D., *Măsuri şi traductoare, Curs, vol.1, Măsurarea mărimilor electrice*, Lito IPCN, 1983.

8.2.Munteanu, R., Dragomir, N. D., Todoran, Gh., Târnovan, I., *Măsuri electrice şi electronice, Culegere de probleme*, Lito IPCN, 1987.

8.3.Dragomir, N., D., şi col., *Măsuri şi traductoare, îndrumător de laborator, vol.2, Măsurări electronice*, Lito IPCN, 1986.

8.4.Patachi, N., şi col., *Măsuri şi traductoare, îndrumător de laborator, vol.1, Măsurarea mărimilor electrice*, Lito IPCN, 1986.

8.5.Patachi, N., şi col., Memorator de măsuri electrice, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1973.

8.6.Micu, D., Patrubany, M. *Optimizarea caracteristicii unui traductor de poziție de tip inductiv*, în vol. *Motoare electrice liniare şi rotative*, pag.129-137, CNEE, Timişoara, 1982.

8.7.Micu, D., *Synthèse d'un champ magnétique par la méthode de régularisation des équations intégrales Fredholm de première espece*, Revue roumaine des sciences techniques, série E.E., tome 37, Vol.3, p.283-293.

8.8.Braşovan, I., Gherman, Gh., *Măsurarea mărimilor electrice şi magnetice, Probleme*, Editura Facla, Timişoara, 1978.

Scanned with OKEN Scanner

9.EXEMPLIFICAREA SINTEZEI DE PROIECTARE PRIN METODA REGULARIZĂRII SISTEMELOR DEGENERATE, CALCULUL PSEUDOSOLUȚIILOR, CALCULUL PSEUDOSOLUȚIILOR NORMALE. NUMĂRUL DE CONDIȚIONARE ÎN PROIECTARE

9.1 ETAPELE PROIECTĂRII UNUI TRADUCTOR DE POZIȚIE INDUCTIV

Se reia problema abordată la capitolul 8, luînd în considerare o bobină cu secțiune circulară constantă cu număr de spire variabil pe etaje.
În Fig.9.1 este reprezentată o spiră din cele z(s) spire circulare de rază R aflate la înălțimea s. Bobina este plasată între cotele a şi b, iar firul inductor se află în planul xOz la distanța x de axa Oz.

Se pune problema de a determina funcția z = z(s) aşa încât tensiunea electromotoare indusă în bobină (evident că valoarea ei este efectivă) să depindă liniar de valoarea x.

Datele numerice aferente sunt a = 4mm, b = 24mm, R = 20mm, x ∈ [0,20] mm, f = 10^3Hz, I = 0,1A.

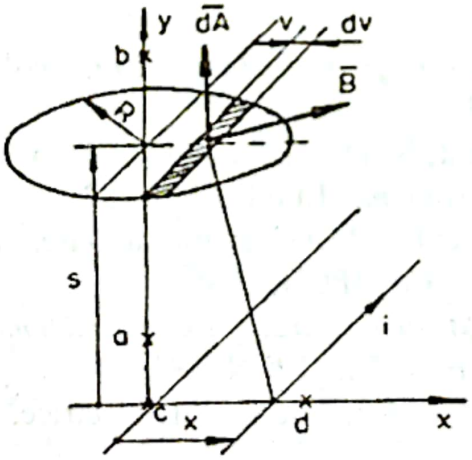


Fig.9.1 Una din cele z(s) spire de rază R aflate pe etajul situat la înălțimea s. Se cere z(s).

9.1.1. OBȚINEREA SISTEMULUI DEGENERAT DE ECUAȚII LINIARE

Se calculează tensiunea indusă în bobină de către conductorul parcurs de curentul sinusoidal i = i(t) în următoarele etape.

Se determină fluxul elementar corespunzător suprafeței haşurate:

Scanned with OKEN Scanner

$$d\phi = BdA\cos\alpha = \frac{\mu_0 i\sqrt{R^2 - v^2}(x - v)}{\pi[s^2 + (x - v)^2]}dv \tag{9.1}$$

Fluxul prin suprafața circulară formată din z(s) spire este:

$$\Phi = \frac{\mu_0 i}{\pi} z(s) \int_{-R}^{R} \frac{\sqrt{R^2 - v^2}(x - v)}{s^2 + (x - v)^2} dv \tag{9.2}$$

Tensiunea electromotoare indusă corespunzător acestui flux este:

$$e_1 = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0}{\pi}\left(-\frac{di}{dt}\right) z(s) \int_{-R}^{R} \frac{\sqrt{R^2 - v^2}(x - v)}{s^2 + (x - v)^2} dv \tag{9.3}$$

Tensiunea electromotoare indusă în întreaga bobină în ipoteza că bobina este formată din p etaje dispuse la înălțimile s_j având respectiv numărul de spire $z_j=z(s_j)$ este:

$$e(x) = \frac{\mu_0}{\pi}\left(-\frac{di}{dt}\right)\sum_{j=1}^{p} z(s_j) \int_{-R}^{R} \frac{\sqrt{R^2 - v^2}(x - v)}{s_j^2 + (x - v)^2} dv \tag{9.4}$$

Notând u(x) valoarea efectivă a mărimii e(x) și ținând seama că expresiei $(\mu_0/\pi)(-di/dt)$ îi corespunde valoarea efectivă

$$\frac{\mu_0}{\pi} 2\pi f.I = \frac{4\pi 10^{-7}}{\pi} 2\pi 10^3 0{,}1 = 2{,}513 \cdot 10^{-4} \tag{9.5}$$

tensiunea indusă în bobină (valoarea ei efectivă) devine:

$$u(x) = \sum_{j=1}^{p} z(s_j) 2{,}513 \cdot 10^{-4} \int_{-R}^{R} \frac{\sqrt{R^2 - v^2}(x - v)}{s_j^2 + (x - v)^2} dv \tag{9.6}$$

Forma (9.6) permite încadrarea problemei de regim cvasistaționar la regimul staționar, mărimile care intervin aici fiind constante în timp.
Se împarte intervalul [a,b] în p = 10 părți egale (dimensiunile sunt în mm):

Scanned with OKEN Scanner

$$h = \frac{b-a}{p} = \frac{24-4}{10} = 2 \tag{9.7}$$

Se notează:

$$s_j = a + (j-0,5)h = 3 + 2j, \quad j = 1 \div 10, \tag{9.8}$$

şi

$$z_j = z(s_j) \tag{9.9}$$

Intervalul corespunzător lui x, [0,20] se împarte în acelaşi număr de părţi şi se notează:

$$\frac{20-0}{10} = h_1 = 2 \tag{9.10}$$

$$x_i = 2i, \quad i = 1 \div 10 \tag{9.11}$$

$$u(x_i) = u_i = 0,1\, x_i = 0,2\, i \ [\text{mV}] \tag{9.12}$$

Ţinând seama de aceste notaţii de discretizare relaţia (9.6) se transformă într-un sistem de p=10 ecuaţii cu p=10 necunoscute. Coeficienţii acestui sistem sunt

$$a_{ij} = 2,513 \cdot 10^{-4} \int_{-20}^{20} \frac{\sqrt{20^2 - v^2}\,(x_i - v)}{s_j^{\,2} + (x_i - v)^2} dv \tag{9.13}$$

Pentru un i fixat relaţia (9.6) devine:

$$\sum_{j=1}^{10} a_{ij} z_j = u_i \tag{9.14}$$

Pentru i=1÷10 rezultă sistemul de 10 ecuaţii cu 10 necunoscute pe care îl bănuim degenerat, ţinând seama că provine dintr-o problemă de sinteză.

Scanned with OKEN Scanner

9.1.2 CONDIȚIONAREA SISTEMULUI DE ECUAȚII LINIARE CORESPUNZĂTOR PROBLEMEI DE PROIECTARE

Calculele se fac folosind utilitarul MATHCAD ale cărui funcții specializate sunt foarte potrivite pentru proiectarea prin sinteza de câmp electromagnetic [1], [2], [3].

Se fixează așa-numitului "format numeric" cu implicații asupra preciziei. Astfel se fixează "pragul de zero" la 150, ceea ce presupune că 10^{-150} este considerat nul de către calculator.

Matricea sistemului se obține după următoarele instrucțiuni comentate aici pe scurt.

ORIGIN ≡ 1 Prin această instrucțiune se modifică modul prestabilit de utilitar, în care originea este 0. Această modificare simplifică programarea ulterioară.

$i:=1..10$

$x_i:=2i$ Se consideră cele 10 poziții ale firului inductor

$j:=1..10$

$s_j:=3+2j$ Se fixează poziția celor 10 etaje considerate

$$a_{ij} := 2{,}513 \cdot 10^{-4} \int_{-20}^{20} \frac{\sqrt{20^2 - v^2}\,(x_i - v)}{s_j^{\,2} + (x_i - v)^2}\,dv$$

Se scrie expresia coeficienților sistemului așa cum rezultă ea din relațiile de proiectare stabilite anterior. Pe ecran apare matricea coeficienților, cu numărul de zecimale dorit. Pentru a avea o imagine clară a ordinului de mărime a coeficienților se prezintă prima linie a matricei

$a_{11}=1{,}19\ 10^{-3}$ $a_{12}=1{,}06\ 10^{-3}$ $a_{13}=0{,}93\ 10^{-3}$ $a_{14}=0{,}82\ 10^{-3}$ $a_{15}=0{,}72\ 10^{-3}$

$a_{16}=0{,}63\ 10^{-3}$ $a_{17}=0{,}55\ 10^{-3}$ $a_{18}=0{,}49\ 10^{-3}$ $a_{19}=0{,}43\ 10^{-3}$ $a_{110}=0{,}39\ 10^{-3}$

Utilitarul poate afișa coeficienții cu cel mult 15 zecimale, de exemplu valoarea primului coeficient este $a_{11}=0{,}001194358952922$.

Se calculează valoarea determinantului matricei **a** cu comanda $|\mathbf{a}|$

$$\det \mathbf{a} = |\mathbf{a}| = 2{,}4136\ 10^{-55} \qquad (9.15)$$

Se calculează valorile proprii ale matricei **a** cu comanda eigenvals(**a**). În algoritmul de calcul aceste valori nu sunt necesare. Prezentarea lor s-a făcut pentru a justifica prin valorile mici ale valorilor proprii valoarea mică a determinantului, știut fiind că determinantul este produsul valorilor proprii.

Să mai observăm că dacă pragul de zero s-ar fi luat 10^{-50} determinantul era nul dar valorile proprii erau toate diferite de zero.

Scanned with OKEN Scanner

Se calculează valorile singulare ale matricei **a** cu comanda svds(**a**) şi se prezintă

eigenvals (a) =

	1
1	$2.8121 \cdot 10^{-2}$
2	$2.9041 \cdot 10^{-4}$
3	$-1.039 10^{-4}$
4	$4.3654 10^{-6}$
5	$7.0185 10^{-7}$
6	$-1.1868 10^{-7}+4.1303 10^{-7}i$
7	$-1.1868 10^{-7}-4.1303 10^{-7}i$
8	$-1.3661 \cdot 10^{-7}$
9	$1.3561 \cdot 10^{-8}+5.9129 10^{-8}i$
10	$1.3561 \cdot 10^{-8}-5.9129 10^{-8}i$

svds (a) =

	1
1	0.0388024688
2	0.000432229
3	0.0002339284
4	0.0000107546
5	7.42944597310^{-7}
6	6.162925442310^{-7}
7	3.595131955910^{-7}
8	1.53187235510^{-7}
9	2.55671335210^{-8}
10	8.872720777210^{-9}

alături de valorile proprii.

Să observăm că se verifică proprietatea (5.36), de la capitolul 5.2.4, unde s-a demonstrat că valoarea singulară maximă a matricei **a**, adică 0,038802, este mai mare decât modulul celei mai mari valori proprii a matricei **a**, adică 0.028121

Se calculează numărul de condiţionare spectral cu formula (5.54)

$$k(\mathbf{a})=\frac{\sigma_1}{\sigma_{10}}=\frac{0{,}0388025}{8{,}8727208*10^{-9}}=4{,}3732*10^{6} \qquad (9.16)$$

Se observă că deşi determinantul matricei sistemului are o valoare mai mică decât cea obişnuită la sistemele de această formă, numărul de condiţionare spectral este mai mic, deci matricea este mai bine condiţionată decât alte matrici provenite din probleme de sinteză. În mod absolut însă numărul de condiţionare este specific unei probleme de sinteză, astfel că sistemul corespunzător matricei **a** este rău condiţionat. Condiţionare bună înseamnă un număr de condiţionare de ordinul zecilor.

Numărul de condiţionare spectral calculat direct de utilitar se obţine în urma instrucţiunii cond2(**a**)

Scanned with OKEN Scanner

cond2(a) = 4.3732·10^6

Se observă, după cum era de aşteptat, coincidenţa cu valoarea calculată pe baza valorilor singulare.

Utilitarul mai permite calculul numărului de condiţionare "sumă", calculat pe baza normei matriciale subordonată normei vectoriale "sumă", formula (5.23).

Vom nota cu cond1(**a**) acest număr de condiţionare

$$\text{cond1}(\mathbf{a})=\|\mathbf{A}\|_1\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_1 \qquad (9.17)$$

Numărul de condiţionare sumă calculat direct de utilitar se obţine în urma instrucţiunii

cond1(**a**)

cond1(a) = 1.1218·10^7

După cum era de aşteptat numărul de condiţionare sumă este de acelaşi ordin de mărime cu numărul de condiţionare spectral

Utilitarul mai permite calculul numărului de condiţionare "maxim", calculat pe baza normei matriciale subordonată normei vectoriale "maxim", formula (5.24).

Vom nota cu condi(**a**) acest număr de condiţionare

$$\text{condi}(\mathbf{a})=\|\mathbf{A}\|_\infty\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_\infty \qquad (9.18)$$

Numărul de condiţionare sumă calculat direct de utilitar se obţine în urma instrucţiunii

condi(**a**)

condi(a) = 8.5011·10^6

Se observă că şi acest număr de condiţionare este apropiat de celelalte două deci natura informaţiei referitoare la sistemul în cauză este aceeaşi.

Utilitarul mai oferă şi un al patrulea număr de condiţionare, aşa numitul număr de condiţionare Turing care se calculează cu formula [9.1]

$$\text{conde}(\mathbf{a})=n\max\left|a_{ij}\right|\max\left|a'_{ij}\right| \qquad (9.19)$$

unde a_{ij} sunt elemente ale matricei **a** iar a'_{ij} sunt elemente ale matricei $\mathbf{a}^{-1}$.

Numărul de condiţionare Turing calculat direct de utilitar se obţine în urma instrucţiunii conde(**a**)

conde(a) = 4.6384·10^6

Din aceste calcule se poate trage concluzia că oricare număr de condiţionare l-am lua în considerare sistemul corespunzător matricei **a** este rău condiţionat. Pe de altă parte se observă că cele patru numere de condiţionare sunt foarte apropiate.

Scanned with OKEN Scanner

Precizia utilitarului permite calculul direct al soluției. Se obține o soluție de o acuratețe desăvârșită, norma erorii fiind

$|\varepsilon_{direct}|=4{,}62\ 10^{-11}$

Precizia aceasta este inutilă, aparatele de măsură nu pot sesiza tensiuni de ordinul de mărime al acestei erori.

Pe de altă parte norma soluției este inacceptabil de mare

$|z_{direct}|=35\ 594{,}46$ cu 28 352 de spire pe etajul 7, imposibil de realizat practic.

9.1.3 CALCULUL PSEUDOSOLUȚIEI CU METODA MINIMIZĂRII NORMEI ERORII

După ce soluția directă, de eroare practic nulă, s-a dovedit irealizabilă fizic, ordinea firească de căutare a unei soluții acceptabile a problemei de proiectare conduce la calculul pseudosoluției, adică la soluția cea mai precisă, descrisă teoretic la capitolul 3.

În prealabil se va face o analiză a matricei $\mathbf{b}=\mathbf{a}^T\mathbf{a}$

Determinantul matricei **b** este pătratul determinantului matricei **a**

$\det \mathbf{b}=|\mathbf{b}|=5{,}8264\ 10^{-110}$

eigenvals(b) =

	1
1	7.872865310^{-17}
2	$6.536713 10^{-16}$
3	2.346630110^{-14}
4	1.292497510^{-13}
5	3.798165110^{-13}
6	5.519666310^{-13}
7	1.156613910^{-10}
8	5.472248110^{-8}
9	1.868218710^{-7}
10	0.0015056

Scanned with OKEN Scanner

Valorile proprii ale matricei **b** sunt întotdeauna pozitive, după cum s-a arătat la capitolul 4.3.2, iar radicalul pozitiv al acestora reprezintă chiar valorile singulare ale matricei **a**

Matricea **b** fiind simetrică,numărul de condiționare spectral se calculează cu formula (5.55), adică este raportul dintre cea mai mare şi cea mai mică dintre valorile proprii ale matricei. Rezultă că numărul de condiționare al matricei **b** este pătratul numărului de condiționare al matricei **a** deci matricea **b** este mult mai rău condiționată decât matricea **a**.

Se prezintă numărul de condiționare al matricei **b** în cele patru variante oferite de utilitar

$\text{cond1}(b) = 4.7196\,10^{13}$

$\text{cond2}(b) = 1.9124\,10^{13}$

$\text{condi}(b) = 4.7196\,10^{13}$

$\text{conde}(b) = 1.9262\,10^{13}$

Calculul pseudosoluției se face cu metoda minimizării normei erorilor (numită şi metoda celor mai mici pătrate), metodă prezentată în capitolul 3.3.

zcmmp =

	1
1	$3.37743\,10^{2}$
2	$1.48147\,10^{2}$
3	$-5.20339\,10^{3}$
4	$6.63376\,10^{3}$
5	$2.66669\,10^{3}$
6	$7.16536\,10^{3}$
7	$-2.83521\,10^{4}$
8	$1.52774\,10^{4}$
9	$-5.43867\,10^{3}$
10	$8.39124\,10^{3}$

ecmmp =

	1
1	$-1.8335\,10^{-5}$
2	$-3.5782\,10^{-5}$
3	$-5.1655\,10^{-5}$
4	$-6.4793\,10^{-5}$
5	$-7.4175\,10^{-5}$
6	$-8.0201\,10^{-5}$
7	$-8.3043\,10^{-5}$
8	$-8.6073\,10^{-5}$
9	$-9.3577\,10^{-5}$
10	$-1.1166\,10^{-4}$

Scanned with OKEN Scanner

Vectorul soluție și vectorul eroare se obține folosind formulele

$$\mathbf{z}_{cmmp}=\mathbf{b}^{-1}\mathbf{a}^{T}\mathbf{u} \qquad (9.20)$$

respectiv

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{cmmp}=\mathbf{a}\,\mathbf{z}_{cmmp}-\mathbf{u} \qquad (9.21)$$

Folosind utilitarul MATHCAD cu instrucțiunile

$zcmmp := b^{-1}\cdot a^{T}\cdot u \qquad ecmmp := a\cdot zcmmp - u$

rezultă valorile prezentate în cele două tabele de mai sus.

Să ținem seama că tensiunea este exprimată în milivolți [mV], astfel că precizia extrem de ridicată pusă în evidență de vectorul $\mathbf{e}_{cmmp}$ este inutilă practic.

Chiar dacă am realiza această precizie nu există modalitatea practică de a o verifica și în ultimă instanță nici nu avem nevoie de o asemenea precizie.

În schimb se poate remarca faptul că soluția dată de vectorul $\mathbf{z}_{cmmp}$ este irealizabilă, pentru că numărul mare de spire pe etaj deformează în mod iremediabil dimensiunea razei presupusă constantă în relațiile de proiectare.

9.1.4 CALCULUL PSEUDOSOLUȚIEI NORMALE CU METODA COEFICIENȚILOR BINOMIALI

Să observăm că la precizia de calcul a utilitarului pseudosoluția este unică, și după cum era de așteptat, este foarte apropiată de soluția exactă, accesibilă din aceleași motive. În aceste condiții preconizăm, conform teoriei expuse la capitolul 4, ca pseudosoluția normală să fie unică și să coincidă cu pseudosoluția. Totuși, din motive de ordin didactic, demonstrativ, se va introduce acest subcapitol care va trata obținerea pseudosoluțiilor normale pentru problema de proiectare abordată.

Subliniem faptul că dacă din diferite motive (alegerea unui număr mai mare de etaje, etc.) determinantul sistemului are ordinul de mărime în jurul valorii de 10^{-150} atunci calculul pseudosoluției cu metoda minimizării normei soluției este imposibilă, singura posibilitate de calcul a pseudosoluției fiind metoda coeficienților binomiali, abordată în continuare. Această metodă rămâne valabilă și dacă determinantul sistemului este mai mic decât pragul de zero al utilitarului.

Modul de aplicare al acestei metode s-a prezentat la capitolul 4.3.

În prealabil se calculează parametrul de regularizare $\alpha(m)$ cu formula (4.152), care

$$\alpha(m) := \left(er\cdot\frac{\lambda}{fact(m)\cdot\left|a^{T}\cdot u\right|}\right)^{\frac{1}{m}}\cdot\lambda$$

se scrie folosind utilitarul MATHCAD

er reprezintă norma impusă a vectorului eroare absolută. Se impune

Scanned with OKEN Scanner

$er := \sqrt{10}$

ceea ce înseamnă că la fiecare etaj se admite o eroare de o spiră.

Mărimea λ reprezintă cea mai mică dintre valorile proprii ale matricei $\mathbf{b}=\mathbf{a}^T\,\mathbf{a}$

$\lambda = 7.872810^{-17}$

Valoarea apare în vectorul valorilor proprii ale matricei **b** în subcapitolul anterior.

Apare necesitatea de a se exprima factorialul, astfel ca fact(0)=1

$$fact(m) := \frac{1}{m+1}\cdot\left[\prod_{i=0}^{m}(i+1)\right]$$

Se calculează valorile parametrului de regularizare pentru m=1..15

α(m)
1.295410^{31}
2.258210^{-24}
5.11510^{-22}
7.163910^{-21}
3.338510^{-20}
9.035610^{-20}
1.799910^{-19}
2.968110^{-19}
4.322610^{-19}
5.778110^{-19}
7.263410^{-19}
8.725510^{-19}
1.012810^{-18}
1.144710^{18}
$1.267\cdot10^{-18}$

Se verifică condiția ca $m\frac{\alpha(m)}{\lambda}$ să fie subunitar, conform relației (4.153). Cea mai mare valoare a expresiei se obține pentru m=15 și este 0,241, deci toate valorile sunt acceptabile.

Scanned with OKEN Scanner

Se calculează pseudosoluția normală cu formula (4.130), care se transformă în limbajul utilitarului în forma

$$znormal(m) := \sum_{r=1}^{m} (-1)^{r+1} \cdot \left(\frac{fact(m)}{fact(r) \cdot fact(m-r)} \right) \cdot \left(a^T \cdot a + identity(10) \cdot r \cdot \alpha(m) \right)^{-1} \cdot a^T \cdot u$$

$znormal(3) =$

	1
1	337.74
2	148.15
3	-5203.39
4	6633.76
5	2666.69
6	7165.36
7	-28352.1
8	15277.38
9	-5438.67
10	8391.24

$enormal(3) =$

	1
1	$-1.8335\,10^{-5}$
2	$-3.5782\,10^{-5}$
3	$-5.1655\,10^{-5}$
4	$-6.4793\,10^{-5}$
5	$-7.4175\,10^{-5}$
6	$-8.0201\,10^{-5}$
7	$-8.3042\,10^{-5}$
8	$-8.6072\,10^{-5}$
9	$-9.3577\,10^{-5}$
10	$-1.1166\,10^{-4}$

Soluțiile pentru m=3, m=4, m=5
sunt identice, deci soluția de mai sus este în mod cert pseudosoluția normală.
Se observă, aşa cum am prevăzut, coincidența dintre pseudosoluția normală de mai sus şi pseudosoluția calculată anterior cu metoda minimizării normei erorilor.

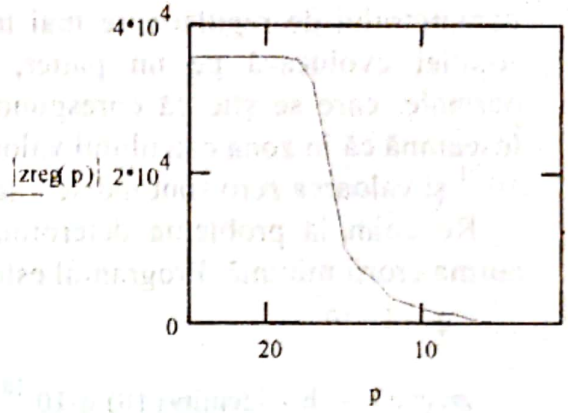
Rezultă că nici pseudosoluția normală nu este realizabilă practic. Rămâne ca soluția problemei de proiectare să fie obținută cu metoda regularizării.

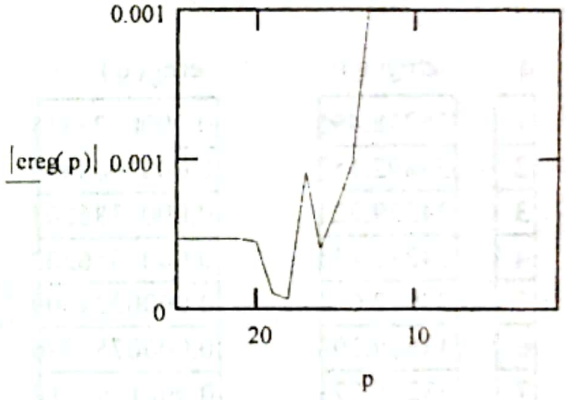
9.1.5 CALCULUL SOLUȚIEI CU METODA REGULARIZĂRII SISTEMELOR DEGENERATE

Se caută parametrul de regularizare α care să realizeze cel mai potrivit balans realizabilitate (norma soluției)-precizie (norma erorii). Se ia α egal cu termenii unei progresii geometrice cu primul termen 10^{-1} şi rația de asemenea 10^{-1}. În general este de aşteptat [9.4],[9.5] o micşorare a normei erorii odată cu micşorarea parametrului de regularizare. Există un minim minimorum al normei erorii, după care norma erorii începe să crească.

Scanned with OKEN Scanner

p	|zreg(p)|	|ereg(p)|
1	1.491	3.8668201255
2	13.15	3.4177635269
3	60.384	1.617872202
4	94.246	0.5042170697
5	101.181	0.437027841
6	175.271	0.3887288326
7	673.793	0.2075082768
8	1211.895	0.0508935297
9	1373.526	0.0253732653
10	1932.016	0.0133053804
11	2727.137	0.0043151877
12	3351.006	0.002788517
13	5622.269	0.0010600155
14	7222.378	0.0004896135
15	9922.08	0.0003516012
16	20516.342	0.0001975485
17	32431.727	0.0004549429
18	35238.495	0.0000323318
19	35559.317	0.000048026
20	35589.775	0.0002284967
21	35593.587	0.0002365274
22	35593.587	0.0002365274
23	35593.587	0.0002365274
24	35593.587	0.0002365274
25	35593.587	0.0002365274





Referitor la norma soluției, este de așteptat ca la micșorarea parametrului de regularizare aceasta să crească, în concordanță cu teoria de la capitolul 4.3.1.

O reprezentare a normei soluției în funcție de norma erorii, cu parametrul de regularizare pe post de parametru, va avea în consecință alura unei curbe în forma literei L, valorile din jurul cotului curbei fiind valorile de compromis în general acceptabile [9.6].

Programul de calcul în utilitarul MATHCAD este elaborat pe baza teoriei din capitolul 2.3.

$$p := 1..25$$

$$zreg(p) := \left(b + identity(10)\cdot 10^{-p}\right)^{-1}\cdot a^{T}\cdot u$$

$$ereg(p) := a\cdot zreg(p) - u$$

Scanned with OKEN Scanner

În urma calculelor au rezultat tabelele şi graficele de la pag.183. Când p ia valori de la 1 la 25 parametrul de regularizare se micşorează de la 10^{-1} la 10^{-25}
Se observă atât din tabel cât şi din grafic că există un minim al normei erorii de valoare 0,0000323318 care se realizează pentru p=18 deci pentru $\alpha(18)=10^{-18}$.

De asemenea se vede că începând de la p=21, deci pentru valori ale parametrului de regularizare mai mici decât 10^{-21} atât norma erorii cât şi norma soluţiei evoluează pe un palier, şi anume valorile corespund pseudosoluţiei normale, care se ştie că corespunde valorii nule a parametrului de regularizare. Înseamnă că în zona calculului valorile parametrului de regularizare mai mici decât 10^{-21} şi valoarea zero sunt indiscernabile.

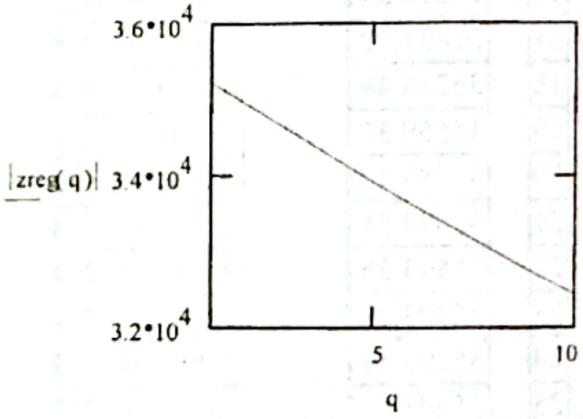
Revenim la problema determinării parametrului de regularizare care asigură norma erorii minimă. Programul este conceput în utilitarul MATHCAD.

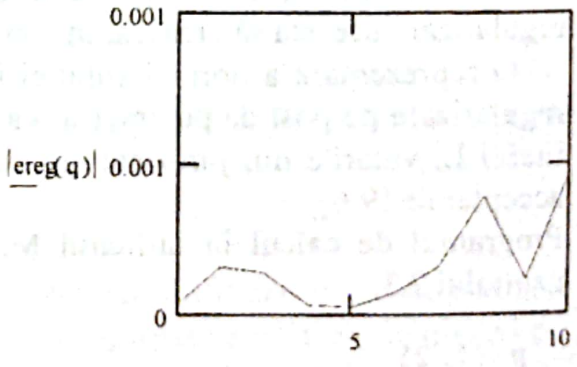
$q := 1..10$

$zreg(q) := \left(b + identity(10)\cdot q\cdot 10^{-18}\right)^{-1}\cdot a^{T}\cdot u$

$ereg(q) := a\cdot zreg(q) - u$

q	|zreg(q)|	|ereg(q)|
1	35238.495	0.0000323318
2	34892.157	0.0001603533
3	34559.221	0.0001386002
4	34231.125	0.0000316202
5	33912.036	0.0000224009
6	33600.204	0.0000751996
7	33295.773	0.0001592018
8	33003.184	0.0003912534
9	32713.329	0.00011663
10	32431.727	0.0004549429





Se caută parametrul de regularizare sub forma $q\ 10^{-18}$ cuprins între 10^{-18} şi 10^{-17} cu q natural.
Se observă că norma erorii este minimă pentru q=5, deci $\alpha=5\ 10^{-18}$

Scanned with OKEN Scanner

Se cercetează acum existența unei valori a parametrului de regularizare cuprinse între 10^{-19} și 10^{-18} pentru care norma erorii ar fi mai mică decât cea din cazul precedent.

$q := 1..10$

$zreg(q) := \left(b + identity(10)\cdot q\cdot 10^{-19}\right)^{-1}\cdot a^{T}\cdot u$

$ereg(q) := a\cdot zreg(q) - u$

q	|zreg(q)|	|ereg(q)|
1	35559.317	0.000048026
2	35520.948	0.0005367997
3	35487.116	0.00013806
4	35449.293	0.000103999
5	35415.66	0.000070446
6	35381.115	0.0000525466
7	35342.598	0.0001959656
8	35308.448	0.0006507875
9	35276.256	0.000035189
10	35238.495	0.0000323318

Se constată că cea mai mică eroare se obține pentru $\alpha=10^{-18}$ (q=10), eroare care este mai mare decât cea obținută în cazul precedent. Rămâne bună $\alpha=5\ 10^{-18}$.

Concluzia este că valoarea parametrului de regularizare pentru care se obține eroare minimă se află între 10^{-17} și 10^{-18}, sau mai precis, în intervalul $[4\ 10^{-18},6\ 10^{-18}]$

În continuare se caută valoarea parametrului de regularizare din intervalul $[4\ 10^{-18},6\ 10^{-18}]$ pentru care norma erorii este minimă.

Se face programul în utilitarul MATHCAD, prezentat mai jos împreună cu rezultatul rulării lui, respectiv tabelele cu norma soluției regularizate și norma erorii în funcție de parametrul de regularizare.

Ca și în celelalte cazuri prezentarea graficelor corespunzătoare este sugestivă.

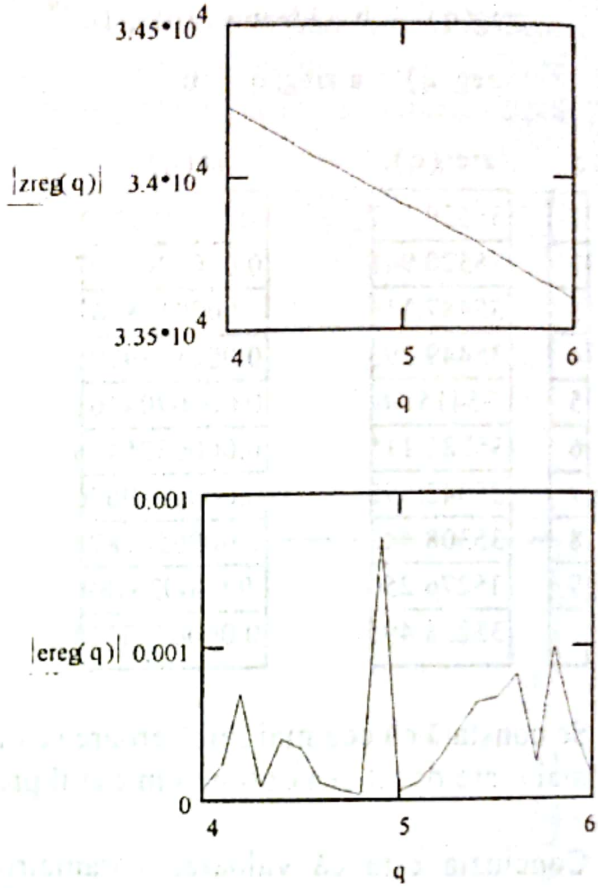
Scanned with OKEN Scanner

$q := 4, 4.1 .. 6$

$zreg(q) := \left(b + identity(10)\cdot q\cdot 10^{-18}\right)^{-1}\cdot a^{T}\cdot u$

$ereg(q) := a\cdot zreg(q) - u$

q	|zreg(q)|	|ereg(q)|
4	34231.125	0.0000316202
4.1	34196.974	0.0001171692
4.2	34165.96	0.0003525118
4.3	34135.068	0.0000383156
4.4	34101.268	0.0001992152
4.5	34070.396	0.0001652373
4.6	34039.774	0.0000613776
4.7	34006.237	0.0000340119
4.8	33975.206	0.0000193426
4.9	33941.315	0.0008618086
5	33912.036	0.0000224009
5.1	33881.256	0.0000598372
5.2	33847.501	0.0001373326
5.3	33817.118	0.0002327744
5.4	33787.797	0.0003182123
5.5	33754.524	0.0003345403
5.6	33725.072	0.0004112055
5.7	33692.212	0.0001177317
5.8	33662.174	0.0005027888
5.9	33632.234	0.0002327966
6	33600.204	0.0000751996



Se constată că minimul erorii se obține pentru q=4,8 adică pentru $\alpha=4{,}8\ 10^{-18}$

Se caută în continuare parametrul de regularizare în intervalul [4,70, 4,90]

$q := 4.7, 4.71 .. 4.9$

$zreg(q) := \left(b + identity(10)\cdot q\cdot 10^{-18}\right)^{-1}\cdot a^{T}\cdot u$

$ereg(q) := a\cdot zreg(q) - u$

Se constată că minimul erorii are loc pentru $\alpha=4{,}80\ 10^{-18}$

Scanned with OKEN Scanner

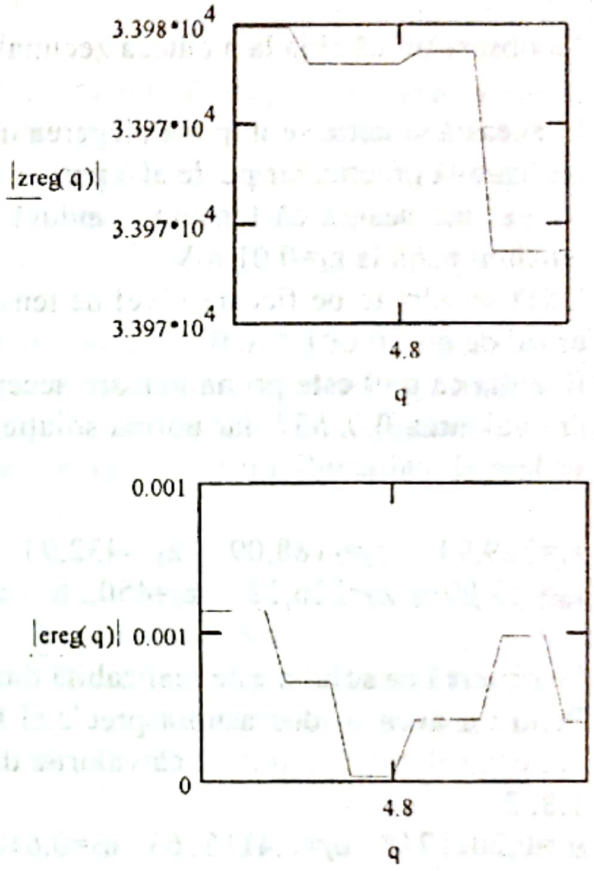
Se caută acum parametrul de regularizare în intervalul [4,791, 4.809]

$$q := 4.791, 4.792 .. 4.809$$

$$zreg(q) := \left(b + identity(10)\cdot q\cdot 10^{-18}\right)^{-1}\cdot a^{T}\cdot u$$

$$ereg(q) := a\cdot zreg(q) - u$$

q	|zreg(q)|	|ereg(q)|
4.791	33975.966	0.0005762346
4.792	33975.966	0.0005762346
4.793	33975.966	0.0005762346
4.794	33975.966	0.0005762346
4.795	33975.206	0.0003292569
4.796	33975.206	0.0003292569
4.797	33975.206	0.0003292569
4.798	33975.206	0.0000193426
4.799	33975.206	0.0000193426
4.8	33975.206	0.0000193426
4.801	33975.433	0.000210848
4.802	33975.433	0.000210848
4.803	33975.433	0.000210848
4.804	33975.433	0.000210848
4.805	33971.435	0.0004898366
4.806	33971.435	0.0004898366
4.807	33971.435	0.0004898366
4.808	33971.443	0.000200833
4.809	33971.443	0.000200833



Se constată că minimul erorii are loc pe un palier, pentru α aparținând intervalului închis [4,798 10^{-18} , 4.800 10^{-18}].
Minimul absolut al normei erorii pentru toate valorile parametrului de regularizare aparținând acestui palier este 0,0000193426, iar norma soluției este 33975,206
Soluția regularizată optimă din punctul de vedere al normei erorii este

z_1=331,63 z_2=35,78 z_3=-4615 z_4=5888,15 z_5=2797,87
z_6=6642,08 z_7=-27026,86 z_8=14764,18 z_9=-5454,45 z_{10}=8252,68

Scanned with OKEN Scanner

Această soluție nu este realizabilă practic datorită numărului mare de spire pe care le presupune pe un etaj. Să mai observăm că soluția este asemănătoare pseudosoluției normale.
Evident că precizia acestei soluții este foarte bună. Se va observa că valorile tensiunii electromotoare induse u_i sunt foarte apropiate de valorile impuse.

u_1=0,2000084 u_2=0,3999864 u_3=0,6000017 u_4=0,7999913 u_5=0,9999965
u_6=1,1999958 u_7=1,3999990 u_8=1,6000014 u_9=1,8000004 u_{10}=1,9999966

Să observăm că abia la a cincea zecimală încep diferențele față de valorile impuse.

În această situație se impune alegerea unei soluții de compromis, soluție care să fie realizabilă practic, iar pe de altă parte norma erorii să fie acceptabilă.
Se va ține seama că tensiunea indusă se măsoară cu un voltmetru care măsoară tensiuni până la ε_1=0,01 mV.
Dacă se admite pe fiecare nivel de tensiune această eroare rezultă norma admisă a erorii de $\varepsilon=(10\ \varepsilon_1^2)^{1/2}$=0,03162.
Rezultă că p=9 este prima valoare acceptabilă. Într-adevăr norma erorii pentru p=9 are valoarea 0,02537, iar norma soluției este 1373,52, promițătoare din punctul de vedere al realizabilității.

z_1=329,94 z_2=-188,09 z_3=-432,93 z_4=-420,57 z_5=-240,93
z_6=-13,09 z_7=226,22 z_8=450,58 z_9=645,37 z_{10}=805,67

Se observă că soluția este realizabilă din punct de vedere practic.
Pentru a avea o idee asupra preciziei se va prezenta rezultatul care se obține cu această soluție, reamintind că valorile dorite sunt 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2.
u_1=0,2071748 u_2=0,4115563 u_3=0,6104906 u_4=0,8048160 u_5=0,9972511
u_6=1,1910171 u_7=1,3930808 u_8=1,6026960 u_9=1,8100725 u_{10}=1,9910178

După cum era de aşteptat, se poate constata că erorile nu sunt distribuite uniform, ceea ce face ca față de eroarea preconizată pe fiecare din cele 10 poziții, pe unele poziții avem erori mai mari (poziția 2şi9) iar pe altele mai mici. Aceste erori sunt prezentate mai jos.

e_1=0,007174 e_2=0,011556 e_3=0,001049 e_4=0,004816 e_5=-0,002748
e_6=-0,008982 e_7=-0,006919 e_8=0,002696 e_9=0,010073 e_{10}=-0,008982

Bobina a fost realizată practic, însă cu f=50Hz şi I=2A, cu dimensiuni dublate şi număr de spire înjumătățit, ceea ce nu modifică tensiunea indusă. Rezultatele experimentale au fost apropiate de cele calculate.

Scanned with OKEN Scanner

9.1.6 OBSERVAȚII ASUPRA STABILITĂȚII LA PERTURBAȚII PE BAZA TEOREMEI LUI WIELANDT ȘI KANTOROVITCH

Se consideră perturbațiile care afectează membrul drept al sistemului. Numărul de condiționare spectral al matricei sistemului fiind de $4{,}3732\ 10^{6}$ se constată pe baza formulei deduse la capitolul 5.5.3 că

$$\varphi_{max}=2\ \text{arctg}(343{,}77/4{,}3732\ 10^{6})=1{,}5722\ 10^{-4} \qquad (9.22)$$

Pentru valori ale unghiului dintre vectorul din membrul drept și vectorul perturbat din membrul drept mai mari decât φ_{max} apare proprietatea de saturație de care se vorbea în capitolul 5.5.3 în sensul că orice perturbație care modifică membrul drept cu un unghi de cel puțin φ_{max} (aproximativ 9 miimi de grad) are același efect asupra soluției.

Calculele efectuate în utilitarul MATHCAD au arătat că la o perturbație de 10^{-7} al unui termen din membrul drept (ultimul), unghiul dintre vectorii corespunzători soluției perturbate și soluției neperturbate este de 5,27 grade. La o perturbație mai mare, de 10^{-6}, unghiul ajunge la 177 grade, iar la perturbații mai mari unghiul se apropie de 180 grade.

S-au făcut de asemenea încercări cu vectori perturbație constanți, adică fiecare termen din membrul drept să fie perturbat în același mod. S-a constatat că unghiul dintre soluții se menține în jurul unei valori maxime de aproximativ 180. Astfel pentru o perturbație de 10^{-2} unghiul $\beta_{max}=179{,}99$ grade pentru operturbație de 10^{-3} avem $\beta_{max}=179{,}86$ grade pentru o perturbație de 10^{-4} rezultă $\beta_{max}=178{,}6$ grade.

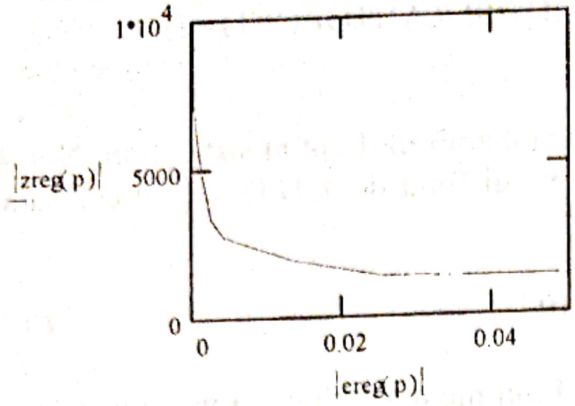
În consecință din punct de vedere practic sistemul analizat este saturat la perturbații, urmare directă a numărului mare de condiționare.

9.1.7 CURBA L

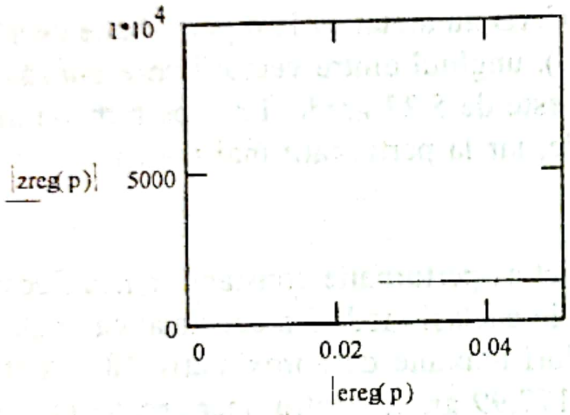
Reprezentarea grafică a normei soluției în funcție de norma erorii, curba L, este prezentată mai jos.

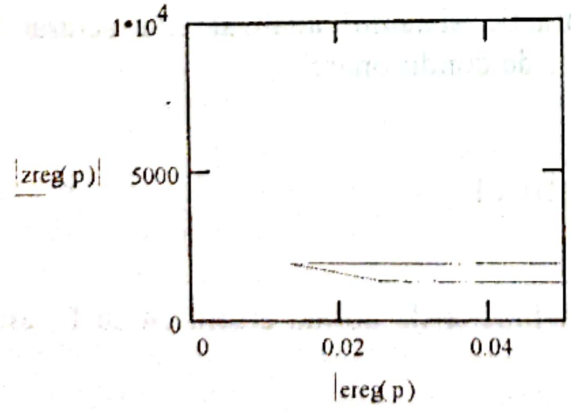
Folosirea curbei L pentru aflarea soluției regularizate optime se bazează pe faptul că acest optim se află la cotul curbei [9.5]. Există [9.6] posibilitatea de a afla analitic valoarea parametrului de regularizare care corespunde cotului curbei.

Scanned with OKEN Scanner

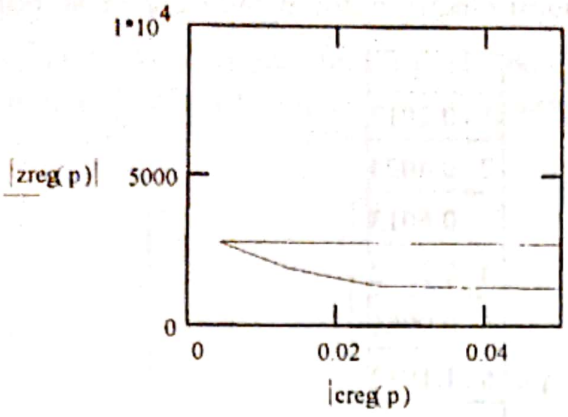


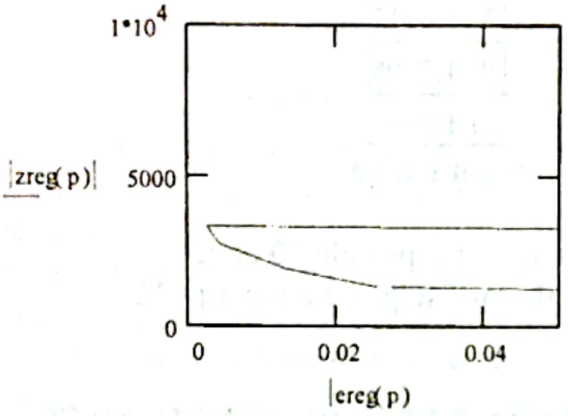
Propunem aici o metodă simplă favorizată de facilitățile utilitarului Mathcad. Se face pe rând p=1, apoi p=2 și așa mai departe, urmărind de fiecare dată evoluția curbei L.





Scanned with OKEN Scanner





Această evoluție se poate urmări cu ușurință pe graficele ridicate în utilitarul pe care îl folosim.

În cele patru grafice ale curbei L, pentru p=9,10,11 şi 12 se observă apropierea de cotul curbei.
Se constată că ultimele două grafice sunt respectiv înainte şi după cot, deci se poate afirma că cotul curbei este între p=11 şi p=12, deci parametrul de regularizare convenabil poate fi $\alpha=10^{-11}$ şi $\alpha=10^{-12}$.

Pentru $\alpha=10^{-11}$ se află norma soluției 2727,13 iar norma erorii 0,0043151877, iar pentru $\alpha=10^{-12}$ norma soluției este 3351 iar norma erorii 0,002788517

Având în vedere precizia acceptabilă şi norma erorii mai mică [9.7] se reține soluția pentru $\alpha=10^{-11}$.

În tabelul din stânga care se prezintă în cele ce urmează se reproduc valorile vectorului soluție, respectiv numărul de spire pe fiecare etaj care se obțin pentru această valoare a parametrului de regularizare.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul din dreapta prezintă valorile tensiunii electromotoare induse care se obțin

zreg(11) =

	1
1	-331.63
2	924.15
3	99.38
4	-743.63
5	-826.76
6	-766.56
7	-256.75
8	383.58
9	1079.44
10	1805.83

a·zreg(11) =

	1
1	0.2017
2	0.4024
3	0.6013
4	0.7992
5	0.9986
6	1.1982
7	1.4008
8	1.6012
9	1.7998
10	1.9997

cu bobina care are numărul de spire din tabelul din stânga.

Se observă că erorile sunt repartizate relativ uniform pe cele 10 etaje.
În ipoteza că se doreşte un nivel mai redus al erorii se poate adopta p=12.

9.2 PROIECTAREA UNUI TRADUCTOR PENTRU VITEZE MICI

Pornind de la ideea folosită în capitolul anterior la optimizarea caracteristicii unui traductor de poziție se va proiecta un traductor de viteza pentru viteze mici (sub 0,1 metri pe secundă).

Daca în problema menționată caracteristica se optimiza prin liniarizare, de data aceasta caracteristica se va proiecta prin sinteză astfel încât sa aibă formă sinusoidala.

9.2.1PRINCIPIUL DE FUNCTIONARE AL TRADUCTORULUI PROIECTAT

Se considera o bobină având secțiunea in formă de pătrat care se deplaseaza cu o viteză constantă necunoscuta pe o direcție rectilinie într-un sens cunoscut. Perpendicular pe direcția de deplasare a bobinei se află inserate în plan conductoare paralele situate echidistant (Fig.1).

Scanned with OKEN Scanner

Evident că se poate considera şi invers, adică bobina fixă şi conductoarele care se deplasează cu viteza v, ca o bandă transportoare, şi pentru că raţionamentul este mai simplu astfel,în cele ce urmează se va socoti bobina fixa.

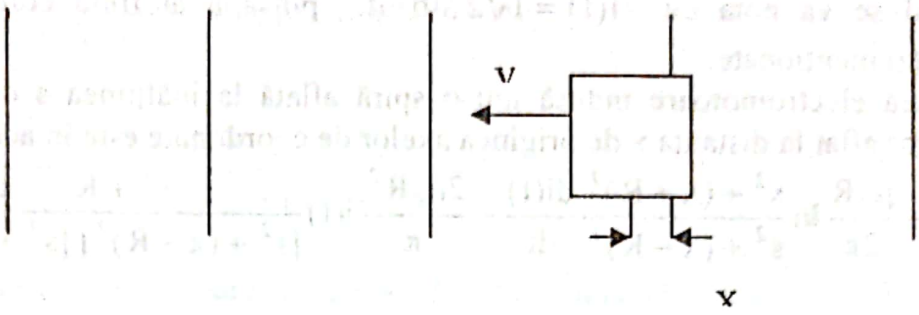


Fig.9.2 Bobina de secţiune pătrată se deplasează cu viteză constantă

Ca şi în cazul tratat la capitolul 8.2 bobina de secţiune pătrată se va construi pe n=10 etaje fiecare etaj având un numar de spire si un sens de înfăşurare care se va determina prin sinteza de proiectare astfel încât tensiunea electromotoare indusă în bobină să aibă o formă care să depindă de x după o caracteristică impusa, optimă din punctul de vedere al proiectarii.

In cazul vitezelor mici componenta tensiunii electromotoare induse prin mişcare este neglijabilă faţă de componenta indusă prin transformare dacă conductorul este alimentat cu un curent având frecvenţa de ordinul 1 KHz-10 KHz. Astfel în acest caz se va lua în calcul numai tensiunea electromotoare indusă prin transformare, care va fi o tensiune modulată în amplitudine, frecvenţa purtătoare fiind chiar frecvenţa curentului din conductor.

Se va impune ca tensiunea electromotoare indusă să fie o sinusoidă în raport cu x astfel că viteza va fi proporţională cu frecvenţa "anvelopei".

9.2.2 STABILIREA RELAŢIILOR DE PROIECTARE

Se consideră situaţia din Fig.8.2 în care s-a reprezentat o singură spiră situată la înălţimea s. Secţiunea spirei se presupune a fi un pătrat de latură 2R, aceeaşi la fiecare înălţime (aşadar lăţimea spirei care în Fig.8.2 este notată cu z(s)se va socoti egală cu R în cazul nostru). Cele n etaje se află dispuse între înălţimile a si b. S-a reprezentat un singur conductor parcurs de curentul i care în cazul nostru se consideră alternativ. Distanţa la care se află conductorul faţă de originea axelor de coordonate s-a notat cu x.

Fluxul magnetic determinat de firul conductor situat la distanţa x prin suprafaţa spirei aflată la înălţimea s se deduce din relaţia (8.3) demonstrată anterior

Scanned with OKEN Scanner

$$\Phi = \frac{\mu_0 R i}{2\pi} \ln \frac{s^2 + (x+R)^2}{s^2 + (x-R)^2} \qquad (9.23)$$

In acest caz firul conductor se alimentează cu un curent de frecvență 10 KHz. Curentul se va nota cu $i(t) = I\sqrt{2}\sin \omega t$ pulsația ω fiind corespunzătoare frecvenței menționate.

Tensiunea electromotoare indusă într-o spiră aflată la înălțimea s de către firul conductor aflat la distanța x de originea axelor de coordonate este în acest caz:

$$e_i(t) = -\frac{\mu_0 R}{2\pi} \ln \frac{s^2 + (x+R)^2}{s^2 + (x-R)^2} \frac{di(t)}{dt} - \frac{2\mu_0 R^2}{\pi} i(t) \frac{s^2 + R^2 - x^2}{[s^2 + (x-R)^2].[s^2 + (x+R)^2]} v$$

(9.24)

Cu v s-a notat viteza de deplasare relativă dintre bobină și conductor.

Datele numerice ale problemei vor fi

R=40 mm

a=8 mm

b=48 mm

I=2 A

d=80 mm

Toate dimensiunile se iau in mm iar tensiunea electromotoare se ia în mV.

Numărul de etaje considerat este n=10. Acesta va fi și numărul necunoscutelor din sistemul care se va forma.

Înălțimea unui etaj va rezulta

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{48-8}{10} = 4$$

Se notează

$$s_k = a + (k - \frac{1}{2})h = 6 + 4k \qquad (9.25)$$

unde k=1,2,3...10.

Astfel înălțimea fiecărui strat va fi in centrul de simetrie al stratului.

Inervalul [0,d],adică intervalul [0,80] pe care ia valori x se împarte tot în 10 părți și se notează:

$$h_1 = \frac{d}{n} = \frac{80}{10} = 8$$

Se noteaza

$$x_j = h_1 j = 8j \qquad (9.26)$$

unde j=1,2...10

La extremitatea din stânga, pentru x=0, condiția nu este necesară, prima ecuație devenind o identitate.

Scanned with OKEN Scanner

Primul termen din (9.24) este tensiunea electromotoare indusă de transformare şi se va nota e_{1t} iar al doilea termen este tensiunea electromotoare indusă de mişcare si se va nota e_{1m}.

Astfel avem

$$e_{1t} = 1{,}0053 \ln \frac{s^2 + (x+40)^2}{s^2 + (x-40)^2} \sqrt{2} \cos \omega t \qquad (9.27)$$

respectiv

$$e_{1m} = 2{,}56 \frac{s^2 + 1600 - x^2}{\left[s^2 + (x-40)^2\right]\left[s^2 + (x+40)^2\right]} v\sqrt{2} \sin \omega t \qquad (9.28)$$

Vom nota cu $E_{1m}(s,x)$ valoarea efectivă a funcţiei sinusoidale e_{1m}.
Un studiu al funcţiei $E_{1m}(s,x)$ ne arată ca maximul se realizeaza pentru s minim deci pentru s=10. Considerând functia $E_{1m}(10,x)$ se observă după calcule elementare că ea creşte pentru valori ale lui x între 0 şi 35,7 şi apoi scade până la x=92,3
Aşadar maximul funcţiei $E_{1m}(s,x)$ se realizează pentru s=10 si x=35,7 şi este pentru v=0,1 m/s $0{,}16\ 10^{-3}$ mV sau 0,16 μV

Un studiu asemănător al funcţiei $E_{1t}(s,x)$ arată că funcţia creşte de la x=0 până la $x=(s^2+1600)^{1/2}$ după care scade. Se observă că pentru x=35,7 ,valoare care realizează maximul de 0,16 μV al funcţiei E_{1m}, funcţia E_{1t} ia o valoare apropiată de 4 mV.

Pe baza acestor observaţii se va neglija termenul e_{1m} în expresia tensiunii electromotoare induse (9.24).
Sunt posibile erori pentru vecinătatea originii (x=0) unde E_{1t} este nul iar E_{1m} nu este nul. Se observă însă că E_{1m} ia ovaloare de circa 1,5 μV maximă în spira de jos.

Se impune condiţia ca tensiunea electromotoare indusă să fie sinusoidală în raport cu distanţa x şi avem:

$$\sum_{k=1}^{10} 1{,}0053 . z_k \ln \frac{s_k^2 + (x_j + 40)^2}{s_k^2 + (x_j - 40)^2} = \sin \frac{\pi x_j}{80} \qquad (9.29)$$

Pentru j=1,2,3...10 rezultă un sistem de 10 ecuaţii cu 10 necunoscute care se tratează după algoritmul prezentat la capitolul anterior.

Tensiunea electromotoare indusă în bobina realizată cu numărul de spire astfel determinat va fi de forma

$$e = \sqrt{2} \sin \frac{x\pi}{80} \sin \omega t \quad [mV] \qquad (9.30)$$

Se obţine după cum se vede o tensiune sinusoidală modulată în amplitudine.

Scanned with OKEN Scanner

Frecvența semnalului este $f_1 = v/160$, deunde $v=160\ f_1$ [mm/s] sau $v=0,16\ f_1$ [m/s]. Forma sinusoidală a semnalului modulat simplifică obținerea frecvenței și implicit a vitezei de deplasare a bobinei.

9.2.3 REZULTATELE PROIECTĂRII TRADUCTORULUI PENTRU VITEZE MICI

Etapele pe care le presupune proiectarea traductorului pentru viteze mici fiind foarte asemănătoare cu cele întâlnite în cazul proiectării traductorului de poziție, se vor prezenta numai rezultatele calculelor efectuate cu utilitarul MATHCAD, comentariile fiind reduse la strictul necesar.

1)Determinantul matricei corespunzătoare relației (9.29)este
det a $=3,2503\ 10^{-37}$ cea mai mare valoare proprie fiind 17,51 iar cea mai mică în valoare absolută $5,12\ 10^{-11}$.

2)Condiționarea sistemului este specifică unei probleme de proiectare prin sinteză de câmp, sistemul este rău condiționat. Numerele de condiționare sunt
cond1(a)=$9,84\ 10^{11}$
cond2(a)=$6,709\ 10^{11}$
condi(a)=$12,57\ 10^{11}$
conde(a)=$6,73\ 10^{11}$
Teorema lui Wielandt și Kantorovitch indică din start o saturare a perturbațiilor de nivel egal cu eroarea de măsurare.

3)Datorită preciziei de calcul adoptate (precizie maximă) pseudosoluția calculată cu metoda minimizării normei erorilor (metoda celor mai mici pătrate) coincide cu pseudosoluția normală calculată cu metoda coeficienților binomiali.
Norma pseudosoluției normale este de 21389,3 iar valorile date în vectorul zcmmp arată clar că realizarea soluției nu este posibilă practic.
Pe de altă parte se observă că nici precizia nu este satisfăcătoare, norma erorii fiind 2,41.

4)Soluția regularizată se determină la fel ca și în exemplul prezentat la capitolul 9.1.5.

Soluția regularizată optimă, având norma erorii minimă egală cu 0,00517 se obține pe un palier pentru parametrul de regularizare α cuprins între $7,890\ 10^{-13}$ și $7,900\ 10^{-13}$. Norma soluției regularizate pe acest palier este de 7192,3.

Scanned with OKEN Scanner

zcmmp =

	1
1	13.67
2	-147.06
3	360.29
4	1044.02
5	-6944.97
6	13052.14
7	-7408.09
8	-6901.39
9	10919.21
10	-3991.46

Soluția regularizată zreg=z(7,89) și eroarea corespunzătoare ereg=e(7,89) sunt prezentate mai jos cu observația că soluția este realizabilă.

z(7.89) =

	1
1	16.66
2	-228.14
3	1185.86
4	-2849.88
5	2604.65
6	1278.06
7	-3131.15
8	-1239.85
9	4310.91
10	-1951.08

e(7.89) =

	1
1	-0.00290141
2	0.00009462
3	0.00162646
4	0.00170982
5	-0.00083291
6	-0.00221461
7	-0.00222749
8	0.00042878
9	0.00054216
10	-0.00129526

Desigur că în funcție de necesitățile problemei se poate alege o soluție cu o normă a erorii mai mică.

Observație:
Cercetări actuale au demonstrat posibilitatea folosirii numărului de condiționare pentru a studia stabilitatea la perturbații a circuitelor electrice [9.8]. De asemenea se poate folosi teorema lui Wielandt și Kantorovitch pentru a determina limita

Scanned with OKEN Scanner

maximă a efectului unei perturbații ce apare într-un circuit [9.9]. Circuitele cu număr de condiționare foarte mare pot avea proprietăți electrice deosebite [9.10].

BIBLIOGRAFIE la capitolul 9

9.1.Jalobeanu, Cireşica, Raşa, I., *MathCad. Probleme de calcul numeric şi statistic,* Editura Albastră, Cluj-Napoca, 1995.

9.2.Cira, O., *Lecții de MathCad*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2000.

9.3.Micu, D.D., Cziker, A., *Metode numerice în electrotehnică*, Editura Casa cărții de știință, Cluj-Napoca, 2001.

9.4.Sikora, R., Palka, R., *Synthesis of one and two-dimensional electrostatic field,* Archiv fur Elektrotechnik, vol.64, pp.105-108, 1981.

9.5.Hansen, P.C., *Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve,* SIAM Review, no.34, pp.561-580, 1992.

9.6.Micu, D., Micu, Adriana, *The optimum problem in electromagnetical field synthesis,* Proceedings of the 4th International Conference of Optimization of Electric and Electronic Equipments, OPTIM 94, pp.35-39, Braşov, May, 1994.

9.7.Munteanu, R., Todoran, Gh., *Teoria si practica prelucrării datelor de măsurare*, Ed. Mediamira, 1997.

9.8.Micu, Adriana, Micu, D., *Devices stability depending on the euclidean condition number,* IEEE-TTTC-International Conference on Automation, Quality and Testing, Robotics, May 23-25, 2002,pp.7-12, Cluj-Napoca, Romania.

9.9.Micu, Adriana, Micu, D., Maghiar, N., *The Wielandt and Kantorovitch inequality in the study of electric circuits stability,* The 4'th International Conference on Renewable Sources and Environmental Electro-Technologies, RSEE'2002, 06-09 June, 2002, Stâna de Vale, Oradea, Romania.

9.10.Micu, D., Iancu, V., Micu, Adriana, *A new power transformer,* The 4'th International Conference on Renewable Sources and Environmental Electro-Technologies, RSEE'2002, 06-09 June, 2002, Stâna de Vale, Oradea, Romania.

Scanned with OKEN Scanner

10. EXEMPLIFICAREA SINTEZEI DE PROIECTARE PRIN METODA MONTE CARLO

Aplicaţiile metodei numerice Monte Carlo au fost focalizate în direcţia obţinerii unui câmp electrostatic constant într-un anumit domeniu [10.1]-[10.3].

10.1. REALIZAREA UNUI CÂMP ELECTROSTATIC CONSTANT ÎNTR-UN SUBDOMENIU DE INTERES ÎN CAZUL UNEI PROBLEME CU SIMETRIE PLAN-PARALELĂ

Pentru a sublinia eficacitatea şi precizia metodei Monte Carlo s-a ales un exemplu tratat în [10.4] care va servi drept termen de comparaţie.

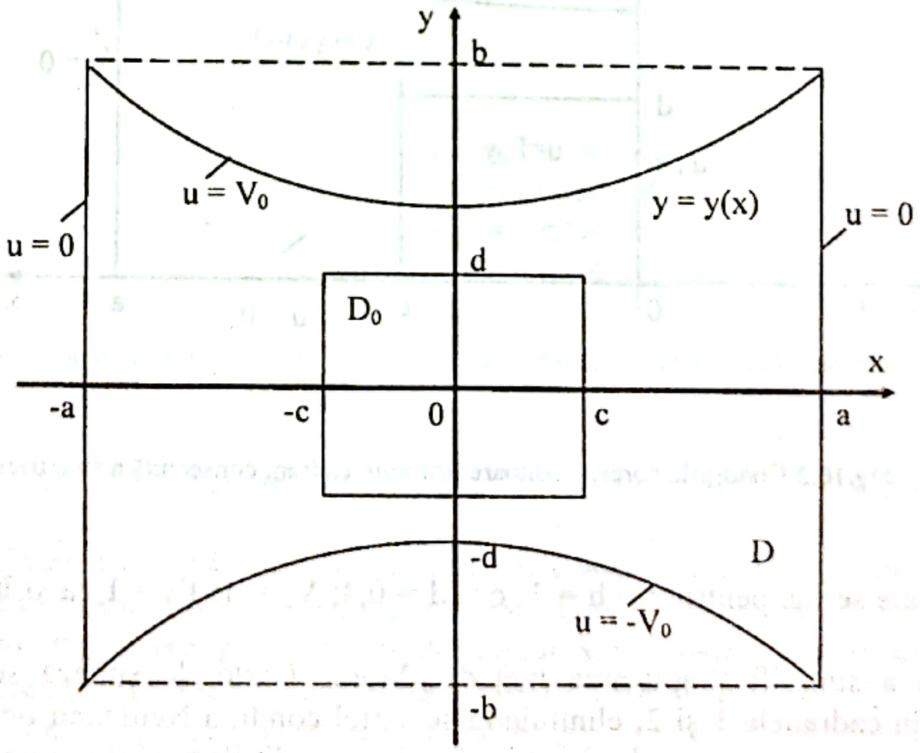


Fig.10.1. Câmp electrostatic plan paralel creat de doi electrozi simetrici

Scanned with OKEN Scanner

Se consideră un câmp electrostatic laplacean creat de doi electrozi simetrici aflați la potențialul V_0, respectiv $-V_0$ (Fig.10.1.).

Se cere să se determine forma electrozilor, $y = y(x)$ astfel încât în domeniul D_0 câmpul să fie constant, de valoare fixă E_0.

Datorită simetriei, problema se va studia numai în primul cadran (Fig.10.2) cu următoarele condiții:

1)Potențialul în domeniul D_0 : $g(x,y) = E_0 y$ pentru $x \in [0,c]$, $y \in [0,d]$.

2)Condiții de frontieră:

$$\begin{array}{lll} u(x,0) = 0 & u(a,y) = 0 & y \in [0,b) \\ u'_x(0,y) = 0 & u(x,b) = f(x) = ? & x \in [0,a] \\ u(a,b) = V_0 = f(a) & f'(x) = 0 & x = 0 \end{array} \qquad (10.1)$$

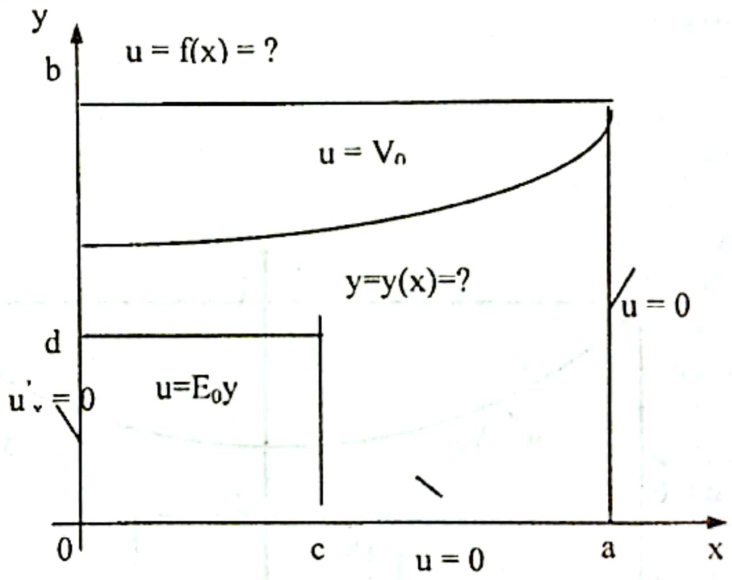


Fig.10.2 Condițiile corespunzătoare primului cadran, consecință a simetriei problemei

Calculele se fac pentru $a = b = 1$; $c = d = 0{,}4$; $V_0 = 1$; $E_0 = 1$ ca și în lucrarea [10.4].

Pentru a simplifica aplicarea metodei Monte Carlo de sinteză se tratează problema în cadranele 1 și 2, eliminîndu-se astfel condiția Neumann omogenă de pe axa Oy, dar se ține seama de simetrie și se pun condițiile numai asupra punctelor din primul cadran, inclusiv axa Oy.

Scanned with OKEN Scanner

10.1.1 MODEL DISCRETIZAT ÎN VARIANTA CU CAPĂT LIBER

La notarea potențialelor necunoscute V_i ($i = 1...10$) se ține de asemenea seama de simetria față de Oy (Fig.10.3).

Se ia pasul de discretizare $h = 0,1$.

Punctele domeniului D_0 sunt însemnate în figură, iar potențialele lor sunt cunoscute $u(x,y) = E_0 y = y$.

Numerotând de la stânga la dreapta şi de jos în sus se impun următoarele valori ale potențialelor

$$\begin{aligned} W_k &= 0,1 \quad \text{pentru } k = 1...5 \\ W_k &= 0,2 \quad \text{pentru } k = 6...10 \\ W_k &= 0,3 \quad \text{pentru } k = 11...15 \\ W_k &= 0,4 \quad \text{pentru } k = 16...20 \end{aligned} \tag{10.2}$$

Aceste valori impuse ale potențialelor asigură valorile impuse ale câmpului electric astfel că se poate spune că proiectarea se face prin sinteză de câmp sau prin sinteză de potențial.

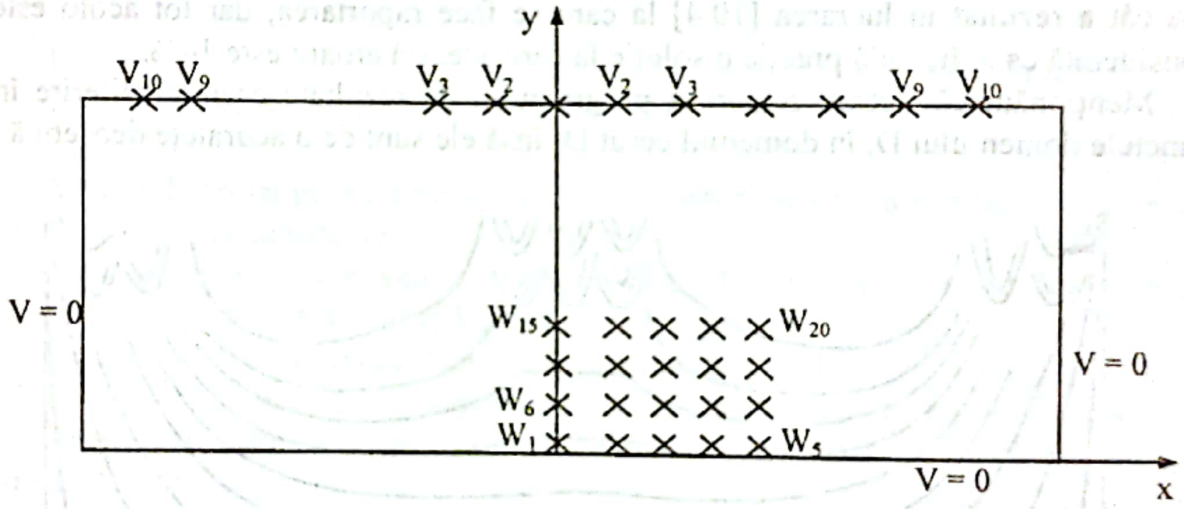


Fig.10.3 Potențialele impuse W_k şi potențialele V_i necunoscute ale rețelei de pas $h=0,1$

Se porneşte din fiecare din cele $m = 20$ puncte cu $N^{(k)} = 5.000$ de trasee aleatoare.

Se foloseşte varianta random 4 cu numerele aleatoare 0,1,2,3, comandând pasul particulei fictive în ordinea: dreapta, sus, stânga, jos.

Pentru elaborarea programului de calcul s-a folosit expresia estimatorului statistic secundar (6.85) particularizată pentru cazul de față, adică

1)mediul omogen, ceea ce presupune $\varepsilon_i = \varepsilon_j$

2)câmp de tip Laplace şi nu Poisson, deci valorile funcției de sursă se consideră nule $S(P_b)=0$

3)rețea pătratică şi nu dreptunghiulară, deci $m=n=1$

Scanned with OKEN Scanner

4)valorile potenţialelor cunoscute de pe frontiera domeniului fiind toate nule, c ia numai valori între 1 şi c_1=10

În aceste condiţii se regăseşte formula din [10.5].

În cazul aplicaţiei sistemul care rezultă este de 20 de ecuaţii cu 10 necunoscute şi termenii liberi sunt uşor de prevăzut: 5.000*0,1 pentru primele cinci ecuaţii, 5000*0,2 pentru următoarele cinci, 5000*0,3 pentru următoarele cinci şi 5000*0,4 pentru ultimele cinci.

S-a aplicat algoritmul de regularizare şi s-a ajuns la sistemul de forma (2.58) cu n=10 şi m=20 care s-a rezolvat pentru diferite valori ale parametrului de regularizare α, obţinându-se de fiecare dată aceleaşi soluţii cu 3 zecimale exacte, confirmându-se observaţia cu caracter de conjectură că sistemele care rezultă prin metoda Monte Carlo sunt bine condiţionate.

Cu aceste soluţii s-a făcut calculul potenţialelor punctelor din interior cu metoda diferenţelor finite, reiterându-se procesul până când cea mai mare diferenţă dintre două valori din iteraţii consecutive a fost mai mică decât 10^{-8}.

S-a calculat eroarea cu formula (2.59). A rezultat ε = 0,003135.

Maximul erorii relative într-un punct din domeniul D_0 a rezultat de 7% faţă de 2% cât a rezultat în lucrarea [10.4] la care se face raportarea, dar tot acolo este considerată ca aplicabilă practic o soluţie la care această eroare este 14%.

Menţionăm că fiecare reluare a programului dă rezultate esenţial diferite în punctele domeniului D, în domeniul cerut D_0 însă ele sunt de o acurateţe deosebită.

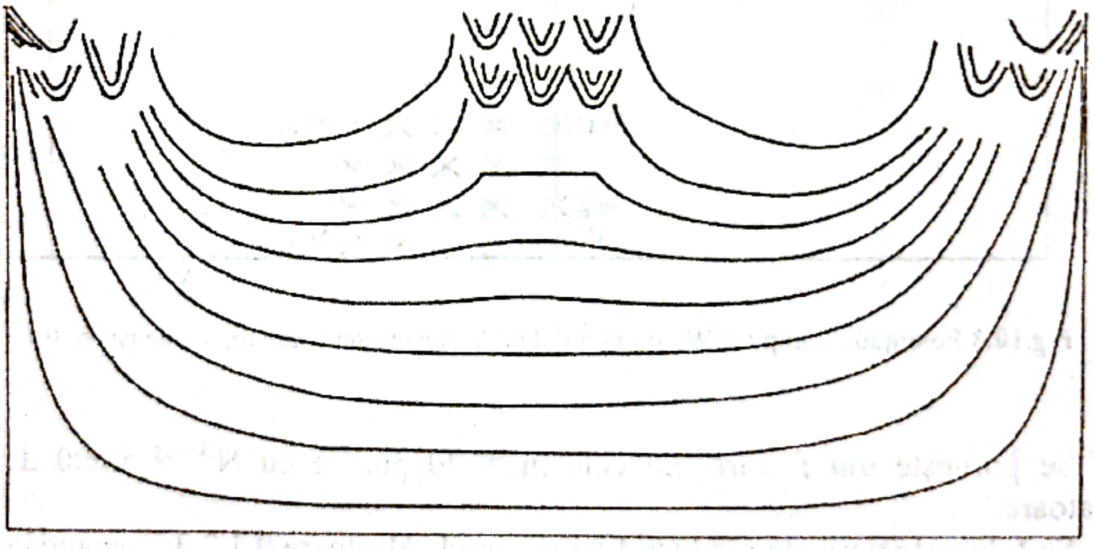


Fig.10.4 Liniile echipotenţiale obţinute cu metoda de sinteză Monte Carlo

Astfel din mai multe reluări cea mai mică eroare s-a obţinut în cazul prezentat mai sus, iar cea mai mare eroare care s-a obţinut a fost ε = 0,028844.

Durata de efectuare a programului fiind de sub 2 minute evident că se pot căuta variante şi mai bune decât cele prezentate.

Scanned with OKEN Scanner

Programul mai realizează trasarea liniilor echipotențiale prin discretizarea mai fină a fiecărui pătrat al rețelei (h/10 = 0,01) şi cu presupunerea variației liniare a potențialului de-a lungul celor două axe.

În Fig.10.4 se prezintă liniile echipotențiale obținute cu algoritmul prezentat anterior.

Sinteza cerută se poate realiza şi cu alte linii echipotențiale de valoare mai mică decât 1.

În condițiile problemei apare o condiție impusă u(a,b) = u(1,1) = 1 care însă nu s-a putut impune la metoda Monte Carlo de sinteză, pentru că nici un traseu aleator nu ajunge în (1,1).

Pentru a avea în mod cert o linie echipotențială de potențial $V_0 = 1$ ce pleacă din colțul (1,1) se face un artificiu, prezentat în varianta următoare.

10.1.2 MODEL DISCRETIZAT ÎN VARIANTA CU CAPĂT FORȚAT

În această variantă se păstrează notațiile din Fig.10.3, însă se face $V_{10} = 1$.

Rămân numai 9 necunoscute V_i (i = 1...9).

Sistemul format pe baza ecuației(6.85), sistem al stărilor absorbante, este de 20 de ecuații cu 9 necunoscute.

Din sistem se poate vedea câte din cele $N^{(k)} = 5.000$ trasee au ca stare absorbantă punctul de potențial $V_{10} = 1$.

Cele arătate în varianta anterioară sunt valabile şi aici.

Soluția este insensibilă la variațiile mici ale parametrului de regularizare α.

Eroarea are o valoare remarcabilă $\varepsilon = 0{,}001891$ mai mică decât cea din varianta cu capăt liber.

Maximul erorii relative într-un punct este 3,25% foarte apropiată de cea din [10.4].

O reprezentare grafică a liniilor echipotențiale se face în Fig.10.5.

După ce s-au obținut valorile potențialelor necunoscute ale punctelor de pe frontiera impusă de formă dreptunghiulară cu metoda de sinteză Monte Carlo s-au calculat potențialele punctelor din interior cu metoda diferențelor finite. Această metodă este optimă pentru că modelul discretizat care corespunde metodei Monte Carlo este acelaşi cu cel ce se foloseşte la metoda diferențelor finite.

Trasarea liniilor echipotențiale s-a făcut presupunând că potențialul variază liniar între două puncte ale rețelei de discretizare.

Scanned with OKEN Scanner

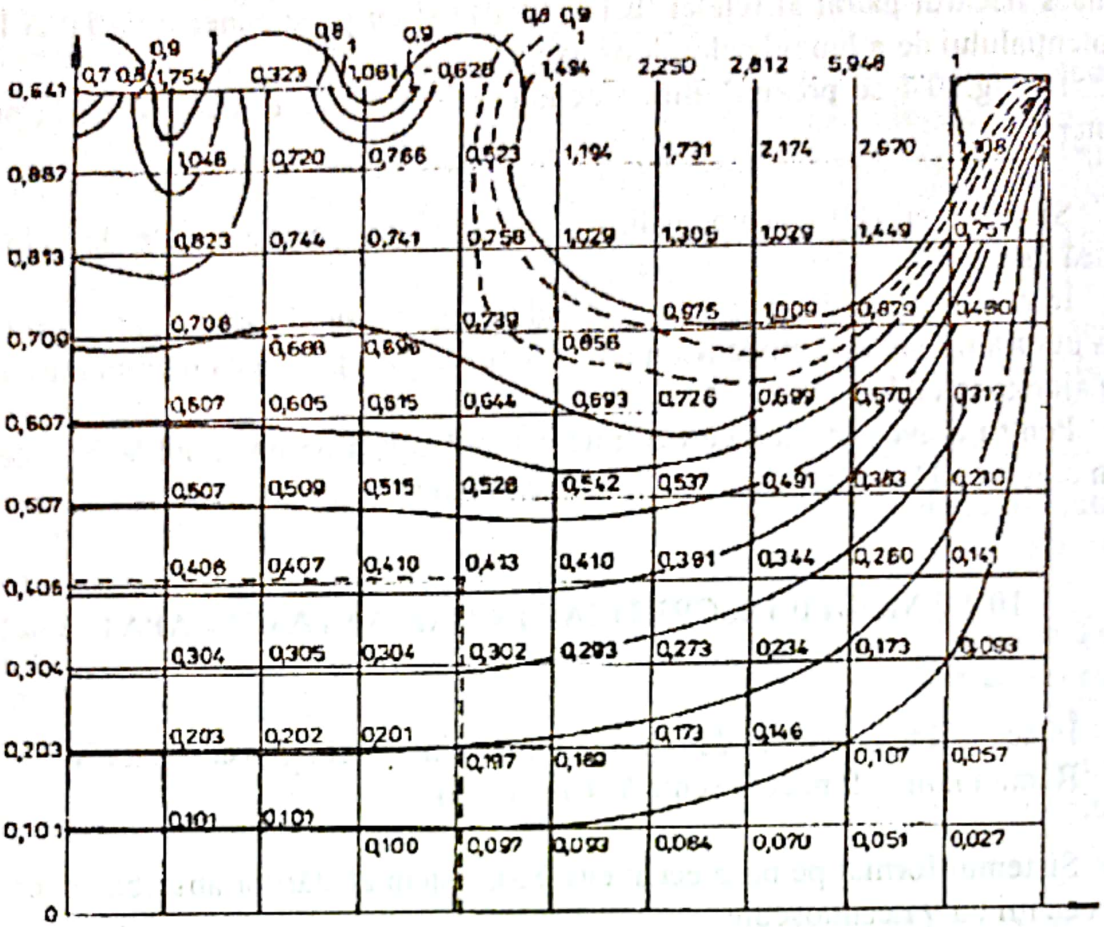


Fig.10.5 Liniile echipotențiale dintre care se alege una ca frontieră fizică a domeniului

Se observă că linia de potențial $V_0 = 1$ impusă nu se închide pe Oy ci iese intersectând dreapta y = 1.

Linia de potențial 1 mai apare de două ori deci s-ar putea intui prin continuitate forma ei.

Se observă că această soluție este mult mai convenabilă din punct de vedere al realizabilității practice decât cea prezentată în Fig.10.4, permițând sinteza şi prin linia echipotențială 0,5 sau 0,6 sau 0,7.

Varianta cu capăt forțat mai are meritul de a sublinia flexibilitatea metodei de sinteză Monte Carlo, posibilitatea de a modifica substanțial soluția prin artificii coercitive de felul celei prezentate.

Folosind datele furnizate de aplicația de mai sus s-a făcut verificarea experimentală a rezultatelor.

Verificarea experimentală constă în simularea unui câmp electrostatic constant într-un subdomeniu de interes pe baza unui model electrocinetic [10.6],[10.7].

Scanned with OKEN Scanner

Se realizează o cuvă de forma modelului din Fig.10.5 având frontiera superioară realizată din platbandă de oţel-aluminiu a cărei imagine se vede în Fig.10.6, laturile dreptunghiului de jos, stânga şi dreapta fiind de asemenea din material conductor. Forma frontierei superioare rezultă din modelul teoretic, suprapunându-se pe linia echipotenţială de 1V din Fig.10.5.
Rezultatele experimentale au fost apropiate de cele numerice, eroarea relativă maximă fiind de 7,5%, următoarea eroare relativă fiind 5,5%, apoi 5% iar restul mai mici decât 3%.

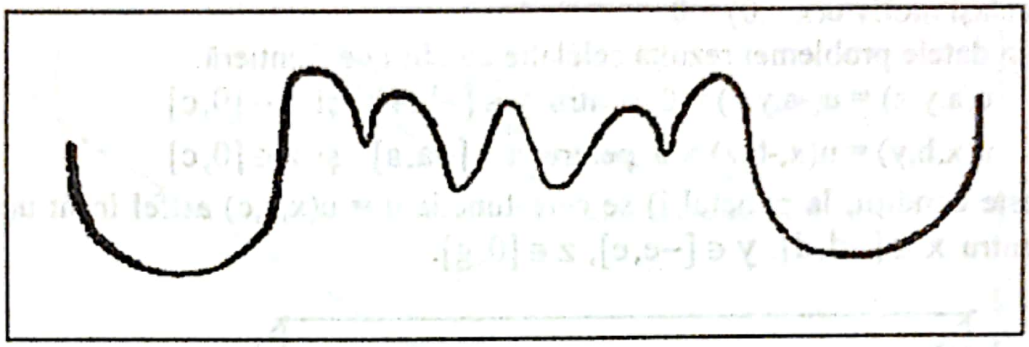


Fig.10.6 Forma frontierei superioare a modelului electrocinetic realizată din platbandă metalică

S-a făcut de asemenea o verificare a aceloraşi rezultate cu ajutorul unui model experimental format din rezistoare identice de 909 kΩ, 2,5%. Erorile maxime care s-au obţinut au fost de 8,5% pe linia de ordonată 0,4 de 2,7% pe linia de ordonată 0,3 de 7,2% pe linia de ordonată 0,2 şi 6,3% pe ultima linie de ordonată 0,1.

10.2.REALIZAREA UNUI CÂMP ELECTROSTATIC CONSTANT ÎNTR-UN SUBDOMENIU DE INTERES ÎN SPAŢIU

Pentru a sublinia eficienţa metodei Monte Carlo de sinteză în spaţiu se propune următoarea problemă.

Se consideră un domeniu D laplacean construit din mulţimea punctelor unui paralelipiped dreptunghic de dimensiuni 2a, 2b, 2c, cu centrul de simetrie în centrul axelor de coordonate.

Feţele laterale constituie suprafeţe de frontieră cu condiţii Dirichlet nule.

i) se cere să se determine distribuţia potenţialului pe suprafaţa superioară (suprafaţa de jos considerându-se încărcată simetric cu sarcină negativă) aşa încât pe un domeniu D_0 de forma unui paralelipiped dreptunghic de dimensiuni 2d, 2e,

Scanned with OKEN Scanner

2g, cu centrul de simetrie în centrul axelor de coordonate, câmpul să fie omogen şi de valoare dată E_0.

ii) se mai cere să se afle forma $z = z(x,y)$ a suprafeţei echipotenţiale de potenţial V_0 care poate realiza acest câmp omogen.

Rezolvarea problemei i)

Se formulează problema matematic .

Din motive de simetrie problema se studiază numai în semispaţiul $z \geq 0$. (Fig. 10.7)

Din acelaşi motiv $u(x,y,0) = 0$.

Din datele problemei rezultă celelalte condiţii de frontieră:

$u(a,y,z) = u(-a,y,z) = 0$ pentru $y \in [-b,+b]$ şi $z \in [0,c]$

$u(x,b,y) = u(x,-b,z) = 0$ pentru $x \in [-a,a]$ şi $z \in [0,c]$

În aceste condiţii, la punctul i) se cere funcţia $u = u(x,y,c)$ astfel încât $u(x,y,z) = E_0 z$ pentru $x \in [-d,d]$, $y \in [-e,e]$, $z \in [0,g]$.

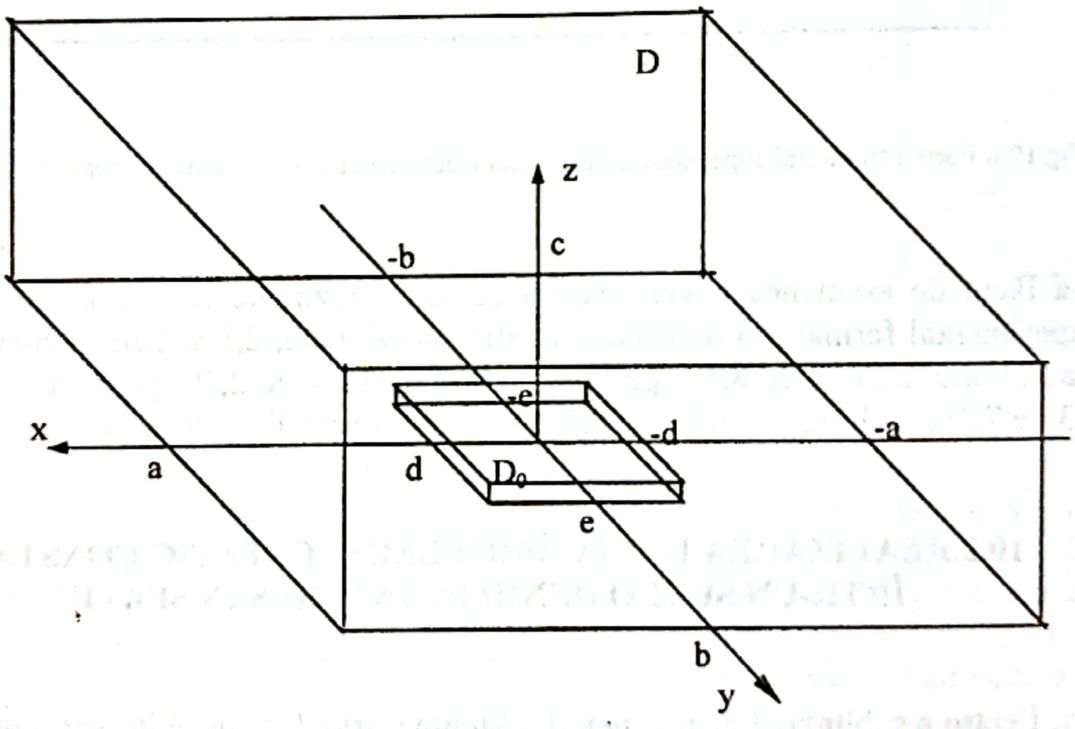


Fig.10.7 Sinteza în spaţiu. Se cere $u(x,y,c)$ astfel încât câmpul spaţial din domeniul D_0 să fie constant

Problema se va rezolva pentru $a = b = c = 1$, $d = e = g = 0,4$ $E_0 = 1$, $V_0 = 0,5$.

În Fig.10.8 apare reprezentat, din motive de simetrie, un cub care reprezintă 1/8 din cubul iniţial.

Scanned with OKEN Scanner

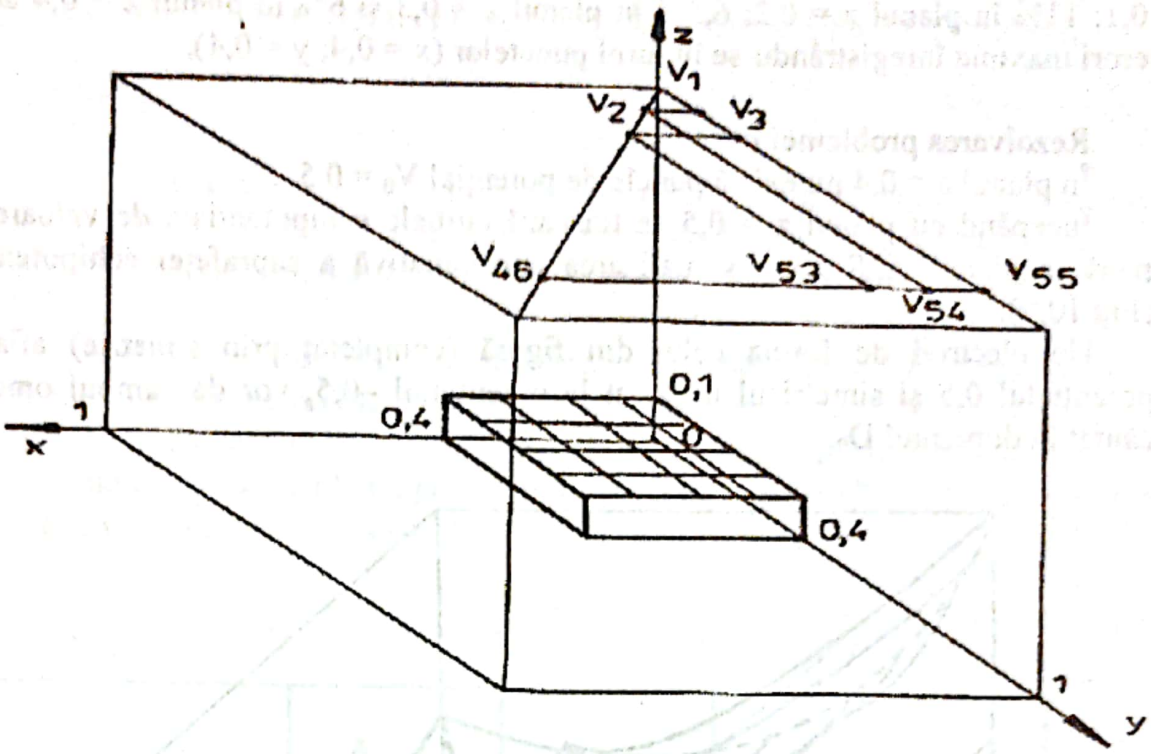


Fig.10.8 Modelul spaţial discretizat. Simetria duce la un număr de 55 de necunoscute

Pasul de discretizare al reţelei cubice se ia h = 0,1.

Se observă că problema este simetrică şi faţă de planul bisector al planelor yOz şi xOz astfel încât numărul necunoscutelor se reduce la n = 55 (Fig.10.8).

În planul z = 0,1, u(x,y, 0,1) = 0,1 pentru $x \in [0; 0,4]$, $y \in [0; 0,4]$ adică pentru 25 de puncte din planul respectiv.

În planul z = 0,2; z = 0,3; z = 0,4 analog valoarea potenţialului coincide numeric cu valoarea ordonatei z, deci sinteza potenţialului trebuie făcută în punctele

W_k (k = 1...100).

Se porneşte din fiecare punct cu $N^{(k)}$ = 5.000 trasee aleatoare. Numerele aleatoare sunt 0,1,2,3,4,5, deci random 6, dirijând particula fictivă respectiv: în faţă, sus, stânga, jos, dreapta, în spate.

Programul care rezolvă punctul i) al problemei este asemănător cu cel de la capitolul 10.1, care se referă la problema plană.

Soluţia reprezintă potenţialele punctelor reţelei de discretizare din planul z = 1.

Cu valorile cunoscute pe frontiera domeniului se află potenţialele în fiecare din punctele interioare cu metoda diferenţelor finite.

Rezultatele sunt date în zece plane paralele cu xOy, planul 10 fiind chiar z = 1.

Se calculează eroarea cu formula (2.59) şi rezultă ε = 0,033403.

Scanned with OKEN Scanner

Maximul erorii relative într-un punct din domeniul D_0 este 14% în planul z = 0,1; 11% în planul z = 0,2; 6,5% în planul z = 0,3 şi 6% în planul z = 0,4 aceste erori maxime înregistrându-se în jurul punctelor (x = 0,4; y = 0,4).

Rezolvarea problemei ii)

În planul z = 0,4 nu există puncte de potenţial $V_0 = 0,5$.

Începând cu planul z = 0,5 se trasează curbele echipotenţiale de valoare 0,5 până la planul10. Rezultă vizualizarea aproximativă a suprafeţei echipotenţiale (Fig.10.9).

Un electrod de forma celui din figură (completat prin simetrie) aflat la potenţialul 0,5 şi simetricul lui aflat la potenţialul –0,5, vor da câmpul omogen căutat în domeniul D_0.

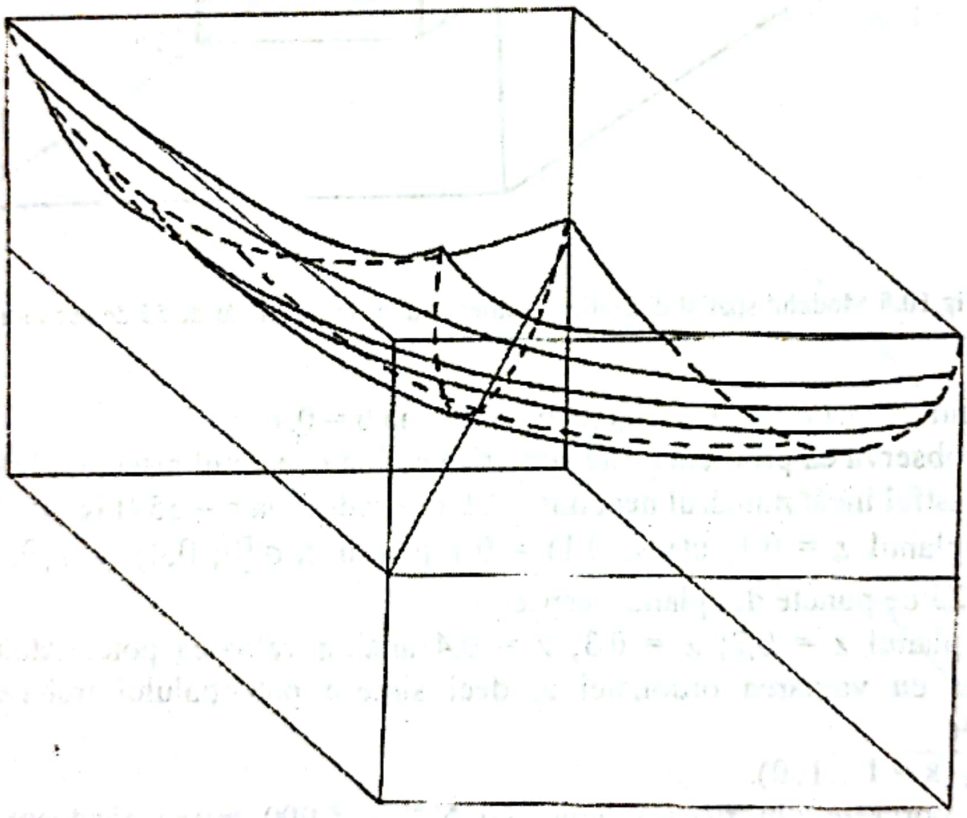


Fig10.9 Forma suprafeţei echipotenţiale care, metalizată, este soluţia sintezei

Evident că suprafaţa metalizată de forma celei din Fig.10.9 împreună cu planul z=0 de potenţial nul vor duce la acelaşi rezultat.

Scanned with OKEN Scanner

10.3.REALIZAREA UNUI CÂMP ELECTRIC CONSTANT ÎNTR-UN SUBDOMENIU DE INTERES APARȚINÂND UNUI DOMENIU NEOMOGEN

Aplicația care se prezintă în continuare este prima exemplificare a metodei de sinteză Monte Carlo în mediu neomogen. Ea are la bază teoria elaborată în capitolul 6. Se va remarca dificultatea deosebită pe care o presupune o astfel de problemă.

Aplicația a fost aleasă astfel încât să generalizeze problema tratată la capitolul 10.1, care se regăsește dacă mediul devine omogen.

Se consideră un domeniu bidimensional de câmp electrostatic laplacean creat de un electrod aflat la un potențial V_0 constant (fig.10.10). Pe frontierele x = a , x =-a şi y = b potențialul este nul.

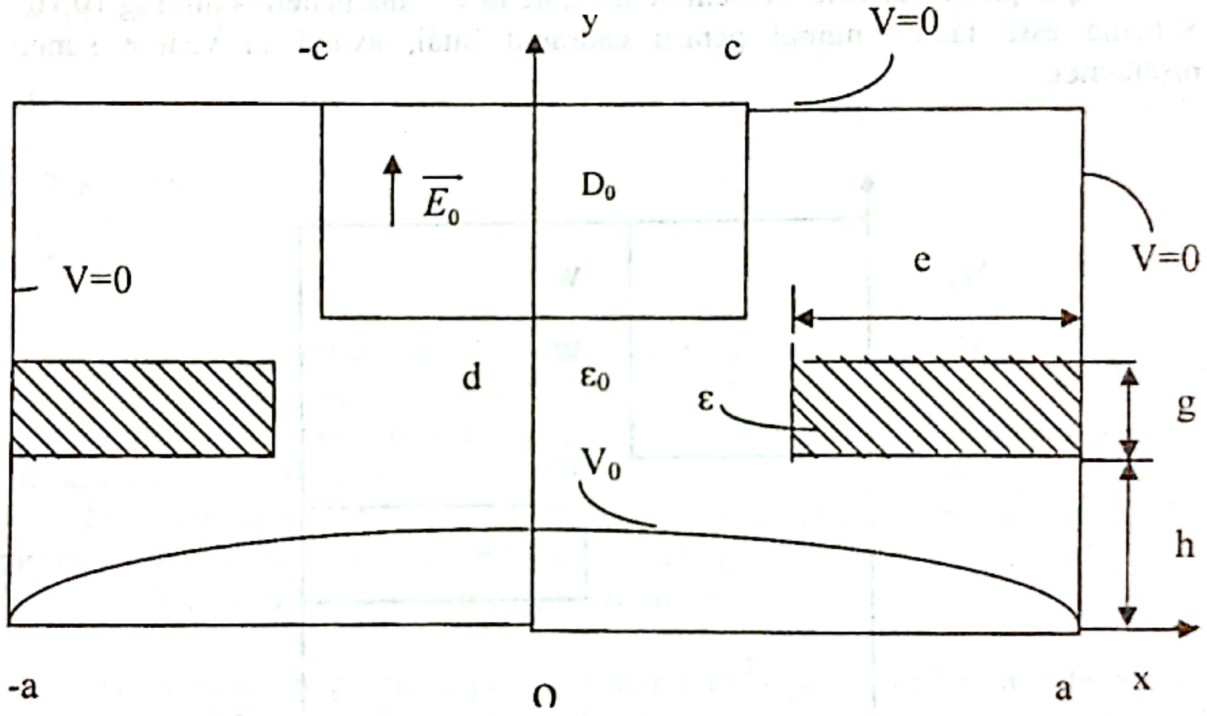


Fig.10.10 Domeniu neomogen de câmp bidimensional laplacean creat de un electrod de potențial V_0

Un subdomeniu de permitivitate ε de formă dreptunghiulară de dimensiuni e şi g este plasat paralel cu axele de coordonate cu colțul din dreapta jos în punctul de abscisă a şi ordonată h. Simetric față de Oy este plasat un subdomeniu identic.

Problema sintezei presupune determinarea formei electrodului şi aflarea potențialului V_0 astfel încât într-un subdomeniu D_0 dreptunghiular de dimensiuni 2c şi b-d plasat cu colțul din dreapta sus în punctul de abscisă c şi ordonată b câmpul să fie omogen de valoare constantă dată E_0.

S-a lucrat în cazul particular

Scanned with OKEN Scanner

a = b =1 c =0,4 d =0,6 h =0,3 g =0,2 e =0,5 E_0 =1
Câmpul electric se consideră E_0 =1
Permitivitatea absolută $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ unde permitivitatea relativă ε_r se va lua pe rând ε_r=1 ; 3; 5; 7; 9; 10; 100; 1000.

Etapele de rezolvare sunt asemănătoare cu cele de la capitolul 10.1. Se consideră frontiera corespunzătoare axei Ox fixată ca formă, respectiv linie dreaptă şi se determină potenţialele punctelor de pe această dreaptă care asigură în subdomeniul de interes D_0 cîmpul impus, respectiv potenţialul impus. Aceasta este în esenţă problema sintezei de câmp convertită la sinteza de potenţial. După aflarea acestor potenţiale de pe axa Ox se află liniile echipotenţiale din întregul domeniu, una din aceste linii, metalizată şi pusă la potenţial corespunzător fiind soluţia problemei.
Pe baza modelului fizic prezentat în Fig.10.10 se construieşte o schemă (Fig.10.11) în care apar particularizate elementele ilustrate în schema generală din Fig.10.10. Schema este făcută numai pentru cadranul întâi, având în vedere simetria problemei.

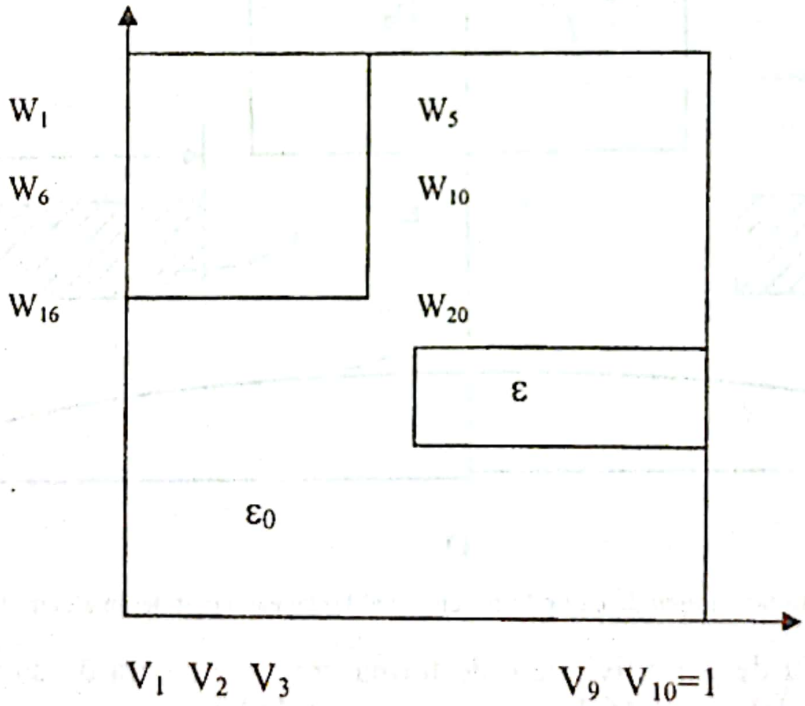


Fig.10.11 Schema modelului pentru aplicarea metodei de sinteză Monte Carlo în mediu neomogen

Se discretizează domeniul cu o reţea pătratică de pas $h_x = h_y = 0,1$
Se impun valorile potenţialelor în 20 de puncte din domeniul D_0 astfel încât câmpul electric să aibă valoarea cerută E_0=1.

Scanned with OKEN Scanner

Aceasta înseamnă că potențialele impuse sunt
$W_1=W_2=\ldots=W_5=0,1$
$W_6=W_7=\ldots=W_{10}=0,2$
$W_{11}=W_{12}=\ldots=W_{15}=0,3$
$W_{16}=W_{17}=\ldots=W_{20}=0,4$

Într-adevăr componenta pe direcția și sensul axei Oy a câmpului electric va fi în domeniul D_0

$$-\frac{V_k - V_{k+5}}{0,1} = E_0 = 1 \qquad (10.3)$$

iar componenta câmpului pe direcția axei Ox va fi evident nulă.
Se ia ca punct de start pe rând câte unul din punctele W_k.
În aplicația considerată se iau pe rând punctele de pe fiecare linie de la stânga la dreapta, liniile luându-se de jos în sus,
astfel
k=16, 17, 18, 19 20;
apoi
k=11, 12, 13, 14, 15;
apoi
k=6, 7, 8, 9, 10;
și în sfârșit
k=1, 2, 3, 4, 5;

Din fiecare punct de start W_k pornesc N_d trasee.
S-a lucrat în trei cazuri N_d=5000 apoi N_d=10.000; și N_d=20.000.

Pentru fiecare punct de start W_k cele N_d trasee duc la obținerea unei ecuații cu necunoscutele $V_1, V_2, \ldots V_9$.

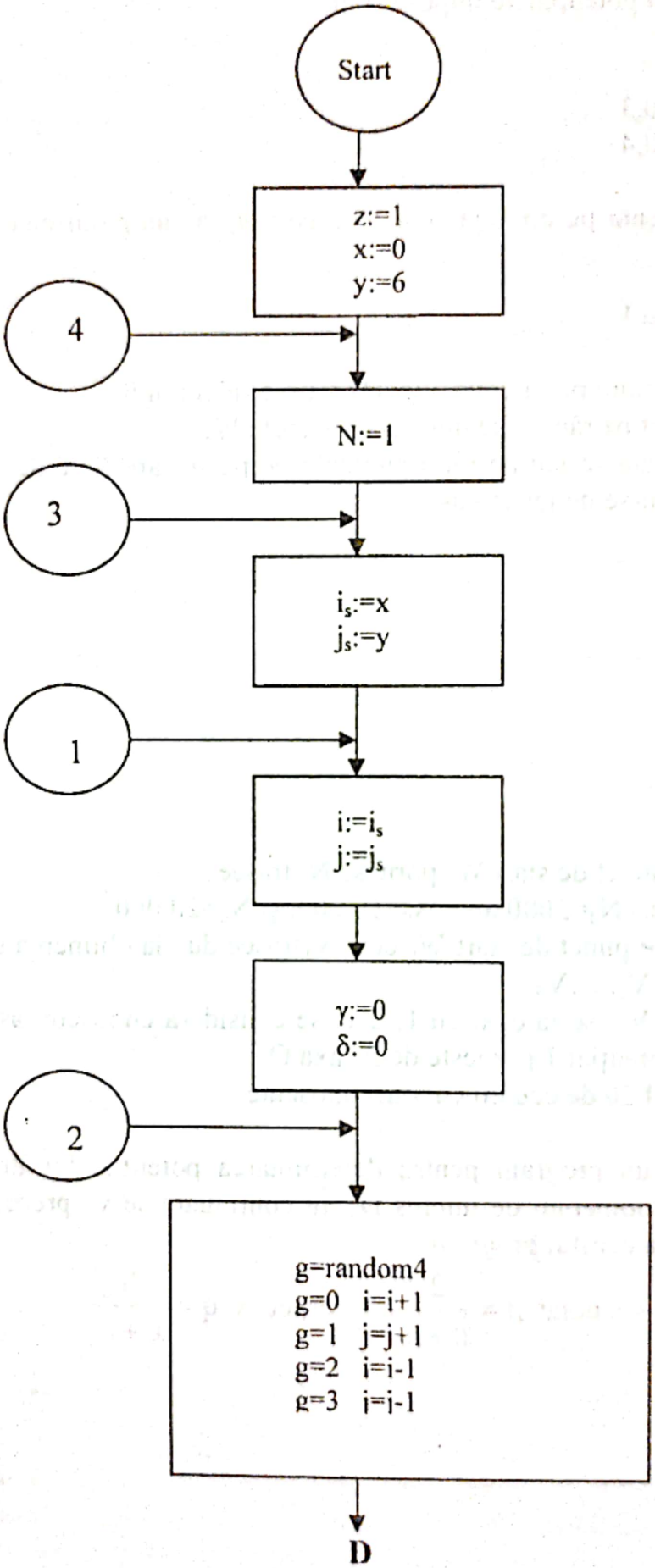
Precizăm că V_{10} se ia egal cu 1, deci se consideră cunoscut, astfel vom fi siguri că o linie de potențial 1 pornește de pe axa Ox.

Rezultă astfel 20 de ecuații cu 9 necunoscute

S-a realizat un program pentru determinarea potențialelor în cele nouă puncte precum și în domeniul de interes D_0. În continuare se va prezenta schema logică care stă la baza acestui program.

Se face precizarea că s-a notat $p = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon_0}$ și respectiv $q = \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}$

Scanned with OKEN Scanner



Scanned with OKEN Scanner

Continuarea schemei logice se face cu un bloc de decizie mai general care include mai multe blocuri de decizie unitare:

BLOCUL **D**

If [(j=4) and ($6 \le |i| \le 9$)] and [(g=1) or (g=3)] $\gamma:=\gamma+1$

If (j=4) and (i=6) and (g=0) $\gamma:=\gamma+1$

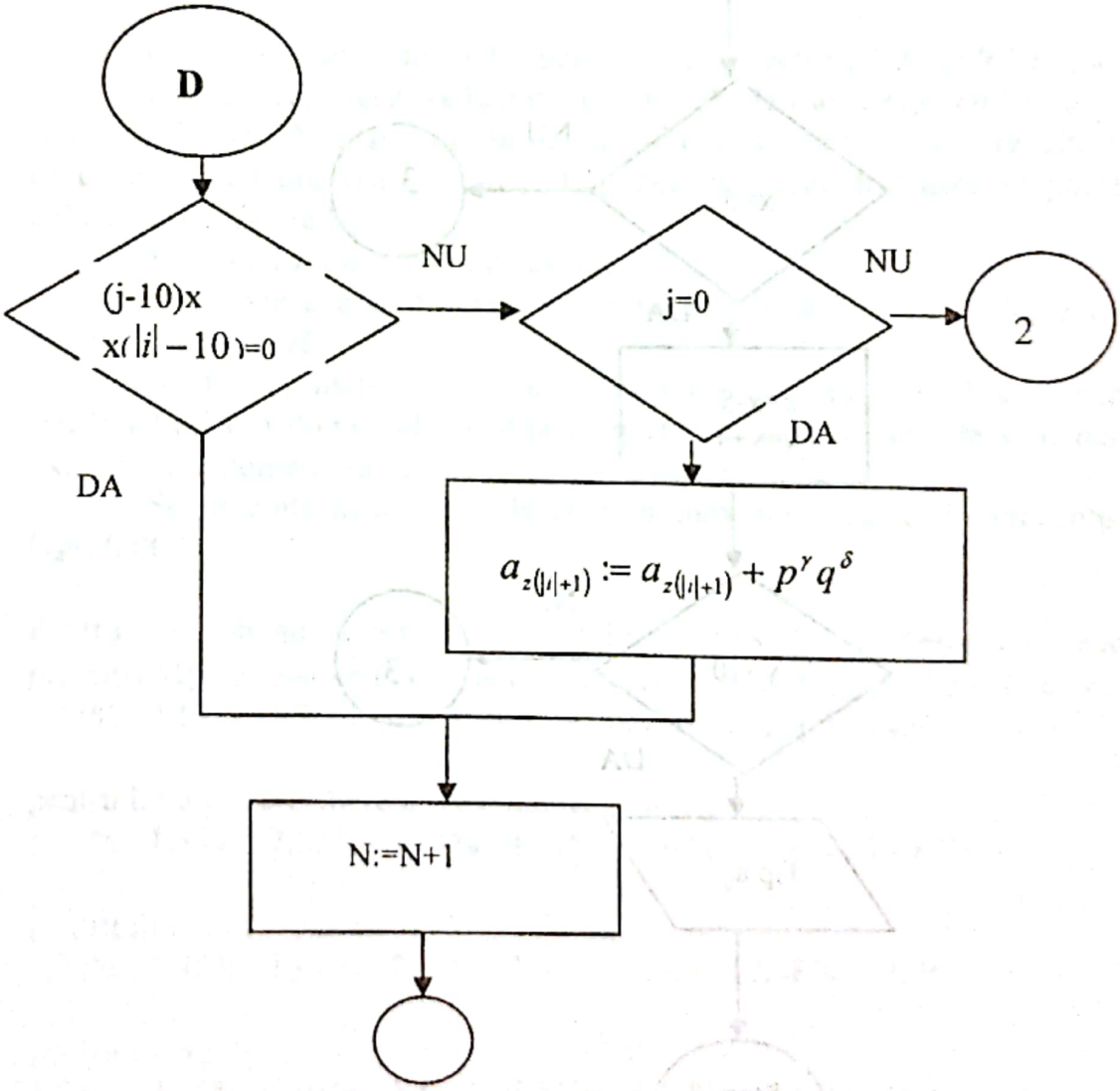
If (j=4) and (i=-6) and (g=2) $\gamma:=\gamma+1$

If (j=2) and ($6 \le |i| \le 9$) and (g=3) $\delta:=\delta+1$

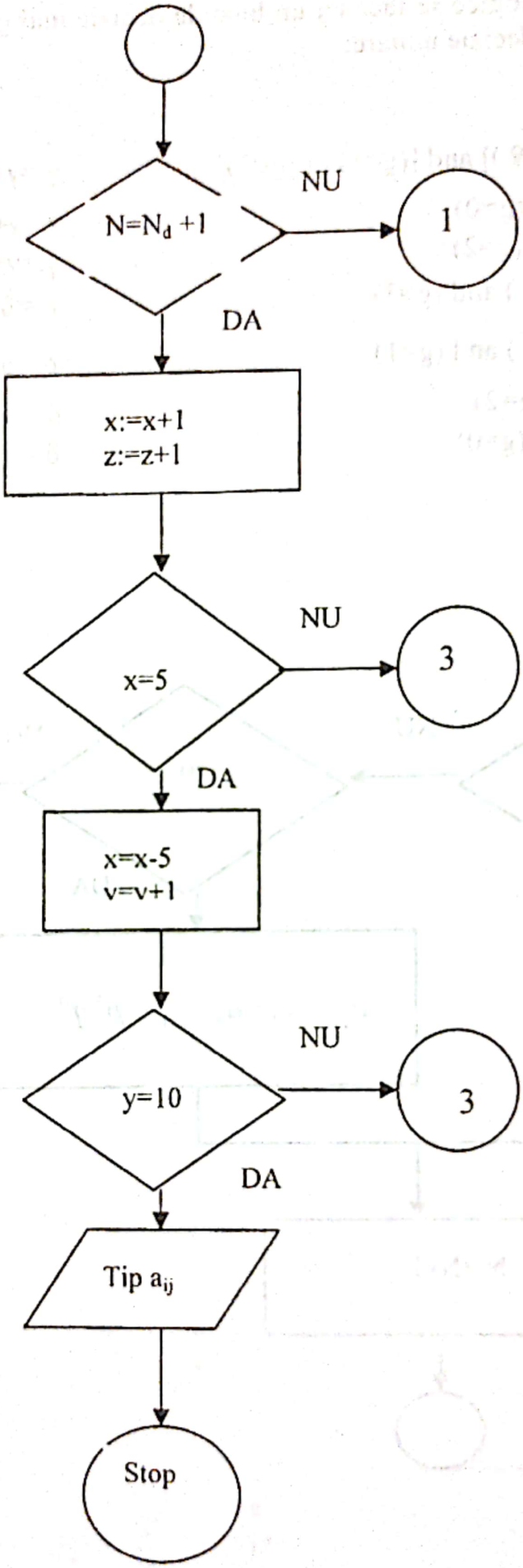
If (j=6) and ($6 \le |i| \le 9$) and (g=1) $\delta:=\delta+1$

If (j=4) and (i=4) and(g=2) $\delta:=\delta+1$

If (j=4) and (i=-4) and (g=0) $\delta:=\delta+1$



Scanned with OKEN Scanner



Scanned with OKEN Scanner

Rezolvarea sistemului de 20 de ecuaţii cu 9 necunoscute se face cu metodele specifice regularizării sistemelor degenerate.
Determinarea potenţialelor tuturor punctelor din domeniu se face cu metoda diferenţelor finite şi nu cu altă metodă de analiză pentru că metoda difernţelor finite este o metodă ce foloseşte aceeaşi reţea de discretizare şi aproape în totalitate aceleaşi relaţii de calcul cu metoda Monte Carlo.

Forma frontierei cerute va fi forma unei suprafeţe echipotenţiale ce trece prin punctele (-9,0) şi (9,0). Cum potenţialul acestor puncte s-a impus la valoarea 1, rezultă că V_0=1. Dacă din punct de vedere fizic frontiera nu poate trece prin zona ocupată de materialul dielectric, atunci rezultatele teoretice care presupun aceasta nu sunt realizabile practic şi problema nu are soluţie.

OBSERVAŢII ASUPRA REZULTATELOR

Calculele s-au făcut pentru permitivităţile relative 1,3,5,7,9,10,100,1000.

Pentru fiecare caz s-a lucrat cu un număr de trasee egal cu 5.000, 10.000 şi respectiv 20.000. Numărul de trasee nu infuenţează semnificativ rezultatele, ceea ce concordă cu observaţiile din [10.9], deci numărul de trasee se poate lua în aplicaţiile ulterioare N_d=5.000.

S-au analizat aşadar 24 de cazuri.

În fiecare caz sunt date valorile potenţialelor V_1, V_2, V_9 obţinute din condiţiile de sinteză.

Sunt prezentate apoi erorile absolute maxime [10.1] corespunzătoare fiecărei linii din domeniul D_0. Aşa cum era de aşteptat, erorile sunt maxime la extremităţile domeniului, adică la capetele liniilor.

Se prezintă acum valorile erorilor maxime relative, în procente, pentru N_d=20.000

Pentru linia j=6, adică y=6 din domeniul de interes D_0 aceste erori corespunzătoare permitivităţilor relative în ordine crescătoare (ε_r =1,3,5,7,9,10,100,1000) sunt
1,11% 2,17% 3,26% 4,6% 5,97% 6,61% 24,43% 24,49%

pentru linia j=7 erorile relative maxime sunt
1,79% 1,33% 2,05% 3,21% 4,41% 4,98% 19,6% 19,87%

pentru linia j=8
3,94% 3,45% 1,68% 2,77% 3,94% 4,5% 17,48% 17,76%

pentru linia j=9
5,25% 4,75% 2,98% 5,88% 3,85% 4,41% 16,34% 16,68%

Scanned with OKEN Scanner

Concluzia este că problema sintezei abordată de noi are soluție acceptabilă numai pentru valori mici ale permitivității relative. Valorile mari deformează în măsură mai mare liniile de câmp făcând imposibilă o soluție în limite acceptabile. Desigur că pentru o altă formulare a problemei de sinteză ar fi posibil ca tocmai permitivități mai mari să fie mai convenabile.

Alura liniilor echipotențiale prezentate susțin această concluzie.

În cazul unor substanțe dielectrice care ar putea fi străbătute de frontiera aflată la potențialul impus V_0, fiecare din cazuri are o soluție realizabilă.

REZULTATELE PENTRU PERMITIVITATE RELATIVĂ MICĂ

Se vor prezenta în continuare rezultatele obținute pentru permitivitatea relativă ε_r =3, pentru un număr de trasee aleatoare N_d=20.000

Valorile potențialelor de pe axa Ox care realizează câmpul dorit în subdomeniul de interes sunt: V_1=1,0726 V_2=-0,7403 V_3=3,6074 V_4=-0,1447 V_5=-0,4848 V_6=4,0580 V_7=2,3891 V_8=-0,0897 V_9=5,4092

Valorile potențialelor în subdomeniul de interes D_0 se vor da pe fiecare linie de la stânga la dreapta, iar liniile se vor prezenta de jos în sus.

Pe linia y=6 de potențial impus 0,4

V(-4,6)=0,4059 V(-3,6)=0,4087 V(-2,6)=0,4074 V(-1,6)=0,4043 V(0,6)=0,4028 V(1,6)=0,4043 V(2,6)=0,4074 V(3,6)=0,4087 V(4,6)=0,4059

Pe linia y=7 de potențial impus 0,3

V(-4,7)=0,2959 V(-3,7)=0,3015 V(-2,7)=0,3031 V(-1,7)=0,3028 V(0,7)=0,3024 V(1,7)=0,3028 V(2,7)=0,3031 V(3,7)=0,3015 V(4,7)=0,2960

Pe linia y=8 de potențial impus 0,2

V(-4,8)=0,1930 V(-3,8)=0,1984 V(-2,8)=0,2007 V(-1,8)=0,2013 V(0,8)=0,2014 V(1,8)=0,2013 V(2,8)=0,2007 V(3,8)=0,1984 V(4,8)=0,1930

Pe linia y=9 de potențial impus 0,1

V(-4,9)=0,0952 V(-3,9)=0,0983 V(-2,9)=0,0998 V(-1,9)=0,1004 V(0,9)=0,1005 V(1,9)=0,1004 V(2,9)=0,0998 V(3,9)=0,0983 V(4,9)=0,0952

Eroarea maximă absolută pe linia j=6 este 0,0087 pe linia j=7 este 0,0040 pe linia j=8 este 0,0069 iar pe linia j=9 este 0,0026

Scanned with OKEN Scanner

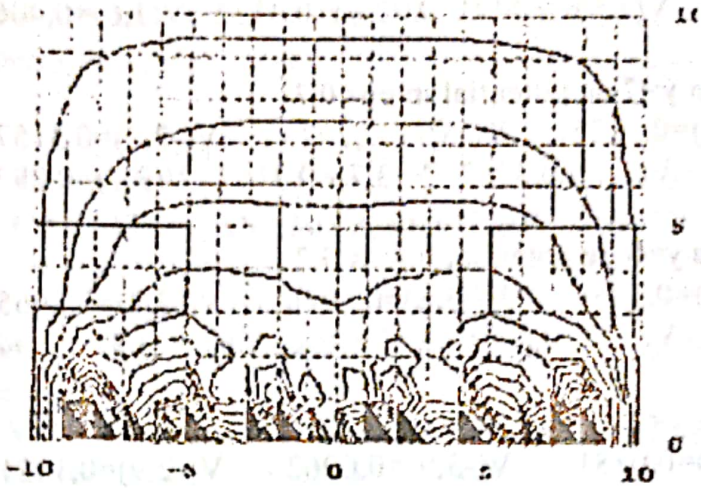


Fig.10.12 Liniile echipotențiale pentru mediu neomogen cu ε_r=3 şi 20.000 trasee aleatoare

Pentru datele de mai sus corespund liniile echipotențiale din Fig.10.12. Se observă că soluția este realizabilă practic însă cu o linie sinuoasă, care nu intersectează porțiunea de dielectric sau cu o linie relativ continuă dacă există posibilitatea ca linia metalizată să intersecteze dielectricul.

Să observăm precizia foarte bună a rezultatelor sintezei în acest caz, forma liniilor echipotențiale fiind elocventă în acest sens.

REZULTATELE PENTRU PERMITIVITATE RELATIVĂ MARE

Se vor prezenta în continuare rezultatele obținute pentru permitivitatea relativă ε_r =1000, pentru un număr de trasee aleatoare N_d=5.000. S-a luat acest număr de trasee pentru că, aparent paradoxal, în această situație precizia este mai mare decât în celelalte două cazuri.

Valorile potențialelor de pe axa Ox care realizează câmpul dorit în subdomeniul de interes sunt: V_1=0,2805 V_2=1,2718 V_3=3,9021 V_4=-1,4407 V_5=1,6652 V_6=2,3344 V_7=2,4982 V_8=1,7494 V_9=4,8860

Valorile potențialelor în subdomeniul de interes D_0 se vor da pe fiecare linie de la stânga la dreapta, iar liniile se vor prezenta de jos în sus.

Pe linia y=6 de potențial impus 0,4

Scanned with OKEN Scanner

V(-4,6)=0,3721 V(-3,6)=0,4066 V(-2,6)=0,4322 V(-1,6)=0,4471
V(0,6)=0,4517 V(1,6)=0,4471 V(2,6)=0,4322 V(3,6)=0,4066 V(4,6)=0,3721

Pe linia y=7 de potențial impus 0,3

V(-4,7)=0,2725 V(-3,7)=0,2973 V(-2,7)=0,3157 V(-1,7)=0,3267
V(0,7)=0,3303 V(1,7)=0,3267 V(2,7)=0,3157 V(3,7)=0,2973 V(4,7)=0,2725

Pe linia y=8 de potențial impus 0,2

V(-4,8)=0,1784 V(-3,8)=0,1946 V(-2,8)=0,2065 V(-1,8)=0,2138
V(0,8)=0,2162 V(1,8)=0,2138 V(2,8)=0,2066 V(3,8)=0,1946 V(4,8)=0,1784

Pe linia y=9 de potențial impus 0,1

V(-4,9)=0,0881 V(-3,9)=0,0962 V(-2,9)=0,1021 V(-1,9)=0,1057
V(0,9)=0,1069 V(1,9)=0,1057 V(2,9)=0,1021 V(3,9)=0,0962 V(4,9)=0,0881

Eroarea maximă absolută pe linia j=6 este 0,0517 pe linia j=7 este 0,0303 pe linia j=8 este 0,0215 iar pe linia j=9 este 0,0118

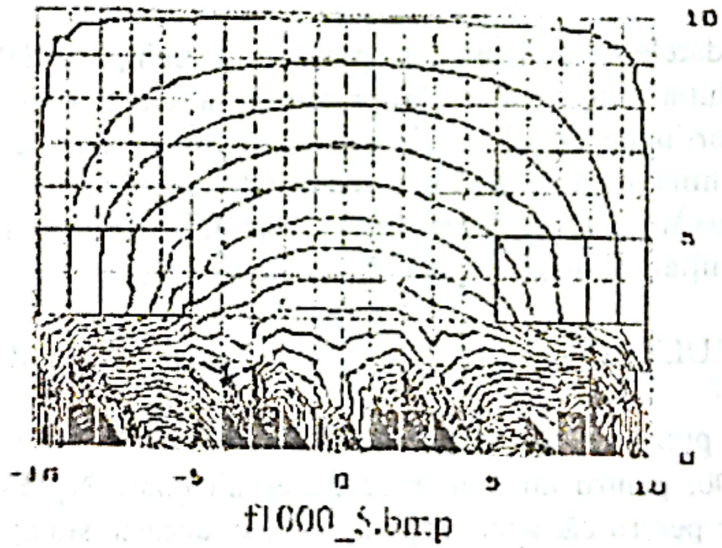


Fig.10.13 Liniile echipotențiale pentru mediu neomogen cu ε_r=1000 și N_d=5.000

Se observă că rezultatele sintezei sunt cu totul necorespunzătoare sub raportul preciziei. Liniile echipotențiale prezentate în Fig.10.13 dau o justificare imposibilității realizării sintezei în cazul mediului cu permitivitate relativă ridicată. Într-adevăr, refracția importantă a liniilor de câmp, care rezultă și din forma liniilor echipotențiale, face dificilă gruparea liniilor echipotențiale într-o poziție paralelă cu axa absciselor în subdomeniul de interes D_0.

Scanned with OKEN Scanner

Să remarcăm în concluzie că rezultatele sintezei de proiectare a unui câmp electrostatic constant într-un subdomeniu de interes sunt corespunzătoare pentru anumite valori ale permitivității relative.

10.4 IDENTIFICAREA POZIȚIEI UNUI OBIECT FOLOSIND METODA MONTE CARLO DE ANALIZĂ ÎN MEDIU NEOMOGEN

Se consideră un domeniu bidimensional în care se stabilește un câmp laplacean electrostatic. Câmpul este creat de către doi electrozi situați la un potențial constant V_a și respectiv $-V_a$, pe frontierele y=a, respectiv y=-a. Pe frontierele x=b și x=-b potențialul este nul (Fig.10.14).

Un subdomeniu rectangular, de permitivitate relativă ε_r, de dimensiuni p și q, este plasat cu colțul din stânga jos în punctul de coordonate x_0 ,y_0 ,unde y_0 este o mărime fixă, constantă.

Domeniul este considerat inaccesibil, numai axa Ox este accesibilă măsurătorilor.

Se pune întrebarea dacă este posibilă identificarea [10.10] poziției subdomeniului (x_0) în cazul în care valorile potențialului pe axa Ox sunt cunoscute.

Se aplică metoda Monte Carlo de analiză a câmpului electrostatic în mediu neomogen și metoda diferențelor finite.

Rezultatele teoretice sunt comparate cu cele experimentale obținute pe baza unui model electrocinetic.

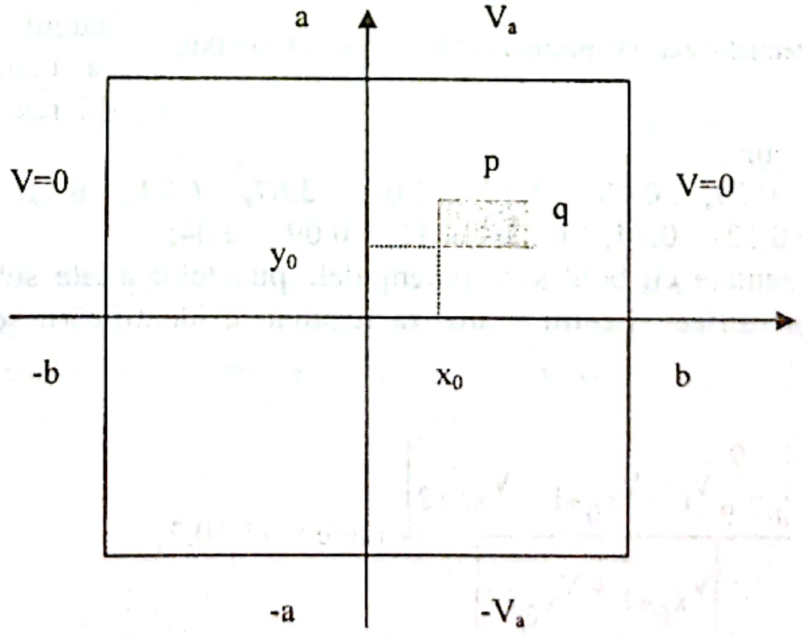


Fig.10.14 Modelul electrostatic al problemei de identificare

Scanned with OKEN Scanner

S-a lucrat în cazul particular a=b=10, p=3, q=2, V_a=100, y_0=1,4,7, şi ε=1,3,10,50,100.

Reţeaua de discretizare s-a considerat de pas $h_x=h_y=1$.

Necunoscutele au fost cele 19 valori ale potenţialelor de pe axa Ox ,notate V_i (i =-9…9) .

Prima poziţie a subdomeniului a fost x_0 =-10, şi ultima x_0 =7.

Numărul traseelor aleatoare considerate a fost N_d =5 10^3 .

Numărul iteraţiilor luate în considerare la metoda diferenţelor finite a fost între 500 şi 600 pentru a realiza o eroare mai mică decât 10^{-7}.

Timpul necesar rulării programului corespunzător metodei Monte Carlo a fost de 10 minute iar pentru metoda diferenţelor finite 20 secunde.

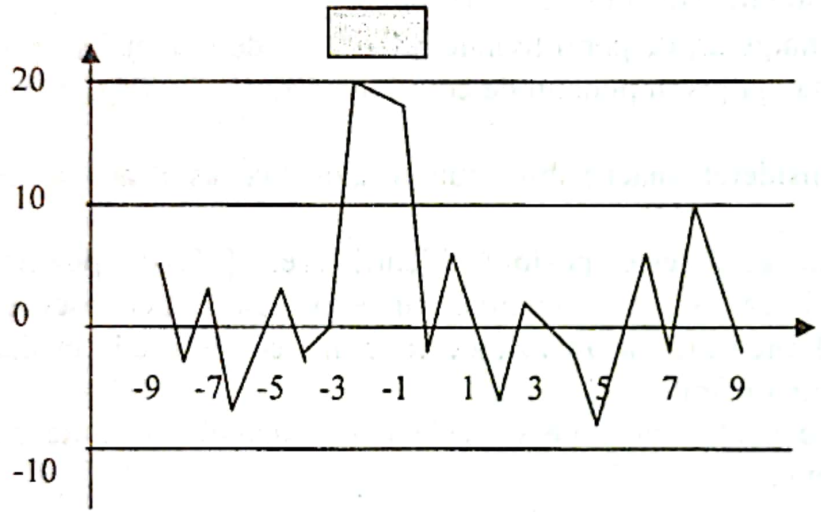


Fig.10.15 Potenţialul axei Ox pentru ε_r =50, y_0=1, x_0=-3 cu MMC

Valoarea maximă a potenţialului de-a lungul axei Ox este în punctul de abscisă –2, V(-2)=20.40 (Fig.10.15). Valorile potenţialelor obţinute cu metoda Monte Carlo sunt prezentate în Fig.10.15.

Pentru aceeaşi poziţie a subdomeniului, potenţialele de-a lungul axei Ox calculate cu metoda diferenţelor finite în cele 19 puncte sunt:

0.09, 0.22, 0.39, 0.68, 1.17, 2.07, **3.67, 6.04, 6.11, 3.84**, 2.25, 1.33, 0.82, 0.52, 0.34, 0.23, 0.15, 0.09, 0.04;

Valorile reprezentate cu bold sunt potenţialele punctelor aflate sub subdomeniul care trebuie identificat. Pentru a analiza rezultatele identificării se introduce un coeficient

$$d(x_0) = 1 - \frac{2}{17}\frac{\left|\sum_{i=-9}^{i=9} V_i - V_{x_0+1} - V_{x_0+2}\right|}{\left|V_{x_0+1} + V_{x_0+2}\right|} \quad \text{unde } x_0 \in [-10,7].$$

Scanned with OKEN Scanner

$d(x_0)$ este o măsură a eficienței identificării. Acest coeficient este cu atât mai mic cu cât subdomeniul este mai aproape de marginile laterale ale domeniului (Fig.10.16.)

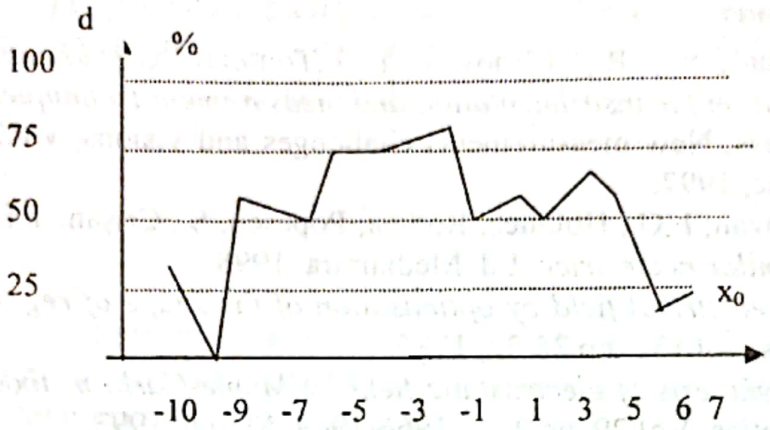


Fig.10.16.Eficiența identificării $d(x_0)$, (MCM, ϵ_r =10, y_0=4)

Pentru a compara între ele cele două metode numerice se introduce un nou coeficient numit eficiența globală a identificării $g(y_0)$

$$g(y_0) = \frac{1}{18} \sum_{x_0=-10}^{7} d(x_0) \qquad (5)$$

Pentru y_0=1,4 şi 7 valoarea acestui coeficient este
60%, 52% şi 56% pentru metoda Monte Carlo
şi
82%, 55% şi 33% pentru metoda diferențelor finite.

Concluzia este că atunci când subdomeniul este aproape de axa Ox este indicat să se folosească metoda diferențelor finite dar când acesta este mai departe, metoda Monte Carlo dă rezultate mai bune.

Pentru modelul electrocinetic mediul omogen este constituit din apă, iar subdomeniul de neomogenitate este un paralelipiped din lemn. Rezultatele experimentale sunt mai puțin precise decât cele teoretice.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE la capitolul 10

10.1 Munteanu, R., Tudoran, Gh., *Teoria şi practica prelucrării datelor de măsurare*, Ed. Mediamira, 1997.

10.2 Dragomir, N.,D., Munteanu, R., Târnovan, I.,G.,Todoran, G., *Modern concepts in the higher education for instrumentation and measurement techniques*, XIV IMEKO World Congress, New measurements-challenges and visions, vol.2, top.1, Tampere, Finland, June, 1997.

10.3 Dragomir, N.,D., Târnovan, I.,G., Holonec, Rodica, Popescu, S., Crişan, T.E., *Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice*, Ed. Mediamira, 1998

10.4 Palka, R., *Synthesis of electrical field by optimisation of the shape of region boundaries*, IEE Proceedings, vol.132, pp.28-32, 1985.

10.5 Micu, D., *Numerical synthesis of electrostatic field by Monte-Carlo method*, IEEE Transactions on magnetics, Vol.29, no.2, pp.1966-1969, March, 1993.

10.6 Şora, C., *Bazele Electrotehnicii*, E.D.P.Bucureşti, 1982

10.7 Simion, E.,Gligor, T.,D., Mîndru, Gh., Popescu, V., Ciupa, R., Micu, D., Ţopa, V., Ţopa, M., *Îndrumător de lucrări de laborator de Bazele electrotehnicii*, Lito IPC-N, Cluj-Napoca, 1987.

10.8 Micu, D., Vlad, Simona., Micu, Adriana, *Performance of the Monte-Carlo method in inhomogeneous media*, Record of the 11th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, COMPUMAG; Rio de Janeiro, Brazil, nov., 1997.

10.9 Micu, D., *Contribuţii la sinteza cămpului electric şi magnetic staţionar*, Teză doctorat, 1993.

10.10 S.R.H. Hoole, S. Subramaniam, R. Saldanha, J.L. Coulomb, and J.C. Sabonnadiere, *Invers problem methodology and finite elements in the identification of cracks, sources, materials and their geometry in inaccessible locations*,IEEE Transactions on Magnetics, vol. 27, no. 3, pp. 3433-3443, May. 1991.

Scanned with OKEN Scanner

11.EXEMPLIFICAREA SINTEZEI DE PROIECTARE PRIN METODA ANALITICĂ

11.1 PROIECTAREA PRIN SINTEZĂ ANALITICĂ A UNUI CÂMP MAGNETIC CONSTANT PENTRU UN DISPOZITIV DE REALIZARE A IMAGINII PRIN REZONANȚĂ MAGNETICĂ

11.1.1.METODA ANALITICĂ ȚUGULEA

Proiectarea se va face folosind metoda analitică Țugulea [11.1].
Se reaminteşte că metoda presupune parcurgerea unor etape specifice
a)stabilirea modelului fizic al problemei
b)stabilirea modelului matematic(model diferențial)
c)prelucrarea modelului matematic(cu metoda separării variabilelor)
d)folosirea condițiilor de sinteză pe parcursul prelucrării modelului matematic cu scopul de a determina constantele ce apar în metoda separării variabilelor.

Ultima etapă este specifică sintezei analitice. Ea presupune implicit o discuție a rezultatelor în funcție de numărul de armonici care se iau în considerare.

11.1.2 PROBLEMA REZONANȚEI MAGNETICE

Realizarea imaginii prin rezonanță magnetică (MRI) are aplicații deosebit de importante în medicină. Dispozitivul respectiv este foarte sensibil. Pentru o funcționare bună este nevoie ca în domeniul în care se plasează obiectul investigat să existe un câmp magnetic constant de 0,6 T în direcția unei axe. Omogenitatea acestui câmp trebuie să fie de ordinul 10 ppm. Aceasta înseamnă că

$$\frac{B_{max} - B_{min}}{B_{max} + B_{min}} \leq 10^{-5}$$

Neomogenitatea câmpului duce la distorsiuni geometrice ale imaginii, distorsiuni care sunt proporționale cu abaterile câmpului față de valoarea impusă.

Modelul fizic al problemei de sinteză este următorul: se cere să se dimensioneze numărul de spire, respectiv distribuția acestora pe lungimea unei bobine cilindrice (Fig.11.1) de rază a=0,16 m şi înălțime l=0,439 m astfel încât în interiorul unei sfere de rază b=0,096m cu centrul în centrul de simetrie al cilindrului, câmpul magnetic să fie constant pe direcția lungimii (înălțimii) bobinei.

Scanned with OKEN Scanner

Această problemă a fost rezolvată în [11.2] cu 8 bobine superconductoare având proprietatea că în fiecare din ele curentul se putea regla cu mare finețe. Datorită acestui artificiu favorizat de o înaltă tehnologie se ajunge la omogenitate de 1ppm.

Aceeaşi înaltă precizie este realizată în [11.3] cu ajutorul unor bobine de compensare în urma unui interesant calcul analitic.

Metoda propusă de noi este o îmbinare originală de calcul analitic şi numeric.

11.1.3 MODELUL MATEMATIC AL PROBLEMEI DE SINTEZĂ

Se consideră bobina cu dimensiunile din Fig.11.1.

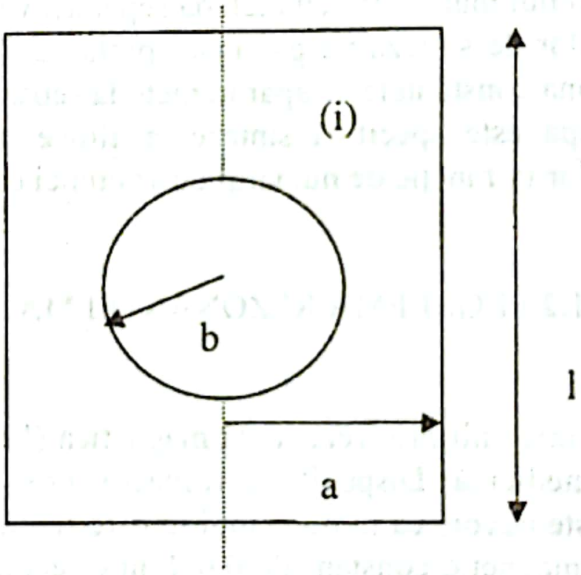


Fig.11.1 Modelul fizic al problemei de proiectare prin sinteză analitică de câmp

Se pune problema de a face modelul matematic al modelului fizic reprezentat de bobina dată, deci de a scrie ecuațiile câmpului electromagnetic .Forma ecuațiilor trebuie să fie diferențială pentru că sinteza analitică presupune modelul matematic diferențial.

Se va folosi sistemul de coordonate cilindrice. Având în vedere că mediul din interiorul şi din exteriorul bobinei este considerat omogen, liniar, izotrop şi lipsit de surse (altele decât curentul ce trece prin spirele bobinei) se poate scrie succesiv

Scanned with OKEN Scanner

rot **H**=0; **H**=-grad V; div **H**=0; div grad V=0; $\Delta V=0$

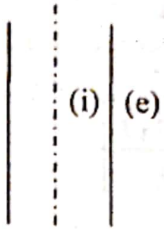


Fig.11.2 Precizarea zonei interioare şi exterioare bobinei cilindrice date

Rotorul e nenul numai în porţiunea în care există surse adică în zona(i)∩(e) din Fig.11.2.

$\text{rot}_S\ \mathbf{H}=\mathbf{J}_S$

Se scriu expresiile operatorilor vectoriali în cazul cel mai general,

$$\text{grad}V=\frac{1}{h_1}\frac{\partial V}{\partial u_1}\mathbf{e}_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial u_2}\mathbf{e}_2+\frac{1}{h_3}\frac{\partial V}{\partial u_3}\mathbf{e}_3$$

$$\text{div}\ \mathbf{G}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_2h_3G_1)}{\partial u_1}+\frac{\partial(h_1h_3G_2)}{\partial u_2}+\frac{\partial(h_1h_2G_3)}{\partial u_3}\right]$$

$$\text{rot}\ \mathbf{G}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\bar{e}_1 & h_2\bar{e}_2 & h_3\bar{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1G_1 & h_2G_2 & h_3G_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta V=\text{divgrad}V=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial V}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial V}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial V}{\partial u_3}\right)\right]$$

În cazul coordonatelor cilindrice suprafeţele care definesc punctul şi parametrii Lammé sunt

respectiv $u_1=r,\ u_2=\theta,\ u_3=z$

$h_1=1,\ h_2=r,\ h_3=1$

Astfel formulele de mai sus devin:

Scanned with OKEN Scanner

$$\text{grad}V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

$$\text{div}\,\mathbf{G} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (rG_1)}{\partial r} + \frac{\partial G_2}{\partial \theta} + \frac{\partial (rG_3)}{\partial z}\right]$$

$$\text{rot}\mathbf{G} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \bar{e}_r & r\bar{e}_\theta & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_1 & rG_2 & G_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{e}_r \frac{1}{r}\left(\frac{\partial G_3}{\partial \theta} - \frac{\partial (rG_2)}{\partial z}\right) + \mathbf{e}_\theta \left(\frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial r}\right) + \mathbf{e}_z \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rG_2)}{\partial r} - \frac{\partial G_1}{\partial \theta}\right)$$

$$\Delta V = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right]$$

Problema este simetrică în raport cu direcția θ (nu există variație în direcția θ), astfel încât formulele de mai sus se vor folosi sub forma mai simplă:

$$\text{grad}V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{e}_z \qquad (11.1)$$

$$\text{div}\mathbf{G} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rG_1)}{\partial r} + \frac{\partial G_3}{\partial z} \qquad (11.2)$$

$$\text{rot}\,\mathbf{G} = \mathbf{e}_r\left(-\frac{\partial G_2}{\partial z}\right) + \mathbf{e}_\theta \left(\frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial r}\right) + \mathbf{e}_z \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rG_2)}{\partial r}\right) \qquad (11.3)$$

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \qquad (11.4)$$

Pentru a defini potențialul magnetic în (i) și (e) se utilizează separarea variabilelor:

Scanned with OKEN Scanner

$$V = R(r) \cdot Z(z) \tag{11.5}$$

Utilizând formula (11.5) în formula (11.4) avem:

$$Z\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + Z\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + R\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$$

de unde cu un artificiu specific metodei separării variabilelor avem

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{Rr}\frac{\partial R}{\partial r} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \alpha \tag{11.6}$$

Rezultă un sistem de două ecuații legate prin parametrul α:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} - \alpha R = 0 \tag{11.7}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \alpha Z = 0 \tag{11.8}$$

Forma soluțiilor depinde de parametrul α

Pentru $\alpha = -\beta^2$ (cu β pozitiv) ecuația (11.8) devine:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \beta^2 Z = 0$$

cu soluția [11.4]:

$$Z = pe^{\beta z} + qe^{-\beta z} \tag{11.9}$$

Dar din motive de simetrie evidente

$$\frac{\partial Z(z)}{\partial z} = \frac{\partial Z(-z)}{\partial z}$$

Cu această condiție din (11.9) avem:

$$Z(z) = 2p \cdot sh\beta z$$

Scanned with OKEN Scanner

dar dacă admitem această soluție ar însemna că $Z(z) \to \infty$, pentru z=∞, deci varianta $\alpha = -\beta^2$ nu este posibilă.

Rămâne varianta $\alpha = \beta^2$, (cu β pozitiv).

În acest caz ecuația (11.7) are soluția:

$$R(r) = A_1 I_0(\beta r) + B_1 K_0(\beta r) \tag{11.10}$$

unde I_0 şi K_0 sunt funcțiile Bessel modificate de ordin zero de speța întâi respectiv de speța a doua

Ecuația (11.8) are soluția:

$$Z(z) = C_1 \sin \beta z + D_1 \cos \beta z \tag{11.11}$$

care cu condiția $\mathbf{H(z)=H(-z)}$

scrisă sub forma echivalentă

$$-\left.\frac{\partial V(r,z)}{\partial z}\right|_{z=u} = -\left.\frac{\partial V(r,z)}{\partial z}\right|_{z=-u}$$

duce la

$$Z(z) = C_1 \sin \beta z \tag{11.12}$$

Din (11.10) şi (11.12) rezultă că soluția (11.5) se scrie sub forma

$$V(r,z) = [A_1 I_0(\beta r) + B_1 K_0(\beta r)] \cdot C_1 \sin \beta z \tag{11.13}$$

Soluția este valabilă atât pentru domeniul interior cât şi pentru domeniul exterior însă constantele sunt diferite şi trebuie determinate separat.

Pentru domeniul interior (i), (r < a)

Pentru că K_0 devine infinit la r=0 (Fig.11.3) se impune ca B_1=0 şi avem:

$$V^{(i)}(r,z) = A_1 C_1 I_0(\beta r) \sin \beta z \tag{11.14}$$

iar cu notația A_1C_1=A soluția pentru domeniul interior devine:

$$V^{(i)}(r,z) = A I_0(\beta r) \sin \beta z \tag{11.15}$$

Cazul $\beta = 0$ trebuie discutat separat

Direct din (11.8) rezultă

$$Z(z) = A_3 z + B_3$$

Dar se observă că pentru z=∞ avem $Z(z) \to \infty$, deci se impune ca A_3=0, asupra lui B_3 neexistând nici o restricție.

În continuare să vedem ce devine ecuația (11.7) pentru β=0 (sau α=0)

Scanned with OKEN Scanner

Soluția este

$$R(r) = A_2 \ln r + B_2$$

dar pentru r=0 ar urma ca R să devină infinit, ceea ce nu e posibil, aşadar se impune ca A_2=0, dar B_2 poate fi şi nenul deci în relația (11.15) avem nevoie de o constantă suplimentară B_2 B_3=A_0.

Pentru domeniul exterior (e), (r > a)

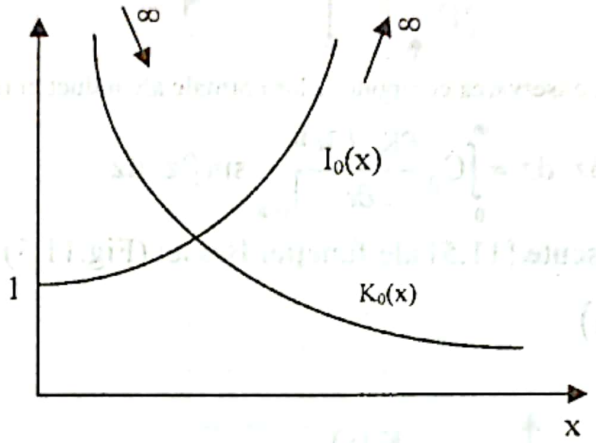


Fig.11.3 Funcțiile Bessel modificate de ordin zero de speța întâi, I_0, şi de speța a doua, K_0.

Revenim la formula (11.13) pentru a determina constantele conform cu condițiile din exteriorul bobinei.

Pentru că $I_0(x)$ devine infinit la r = ∞, (Fig.3) rezultă că A_1=0 şi cu notația B_1 C_1=C avem:

$$V^{(e)}(r,z) = CK_0(\beta r)\sin \beta z \qquad (11.16)$$

Nu sunt necesare constante suplimentare pentru că la z=∞ şi r=∞ avem V(r,z)=0.

Relațiile (11.15) şi (11.16) sunt soluții pentru orice β pozitiv, deci soluția generală va fi dată de suprapunerea tuturor soluțiilor:

$$V^{(i)}(r,z) = A_0 + \int_0^{\infty} A_\beta I_0(\beta r)\sin \beta z \, d\beta \qquad (11.17)$$

$$V^{(e)}(r,z) = \int_0^{\infty} C_\beta K_0(\beta r)\sin \beta z \, d\beta \qquad (11.18)$$

Cu (11.1) şi (11.17), (11.18) avem

Scanned with OKEN Scanner

$$B_r^{(i)}(a,z) = B_r^{(e)}(a,z) \tag{11.19}$$

(Fig.11.4), ceea ce se mai scrie:

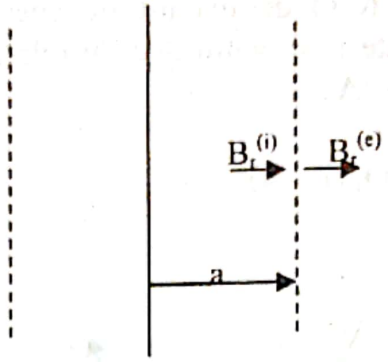


Fig.11.4 Conservarea componentelor normale ale inductiei magnetice

$$\int_0^\infty A_\beta \left.\frac{\partial I_0(\beta r)}{\partial r}\right|_{r=a} \sin\beta z \; dz = \int_0^\infty C_\beta \left.\frac{\partial K_0(\beta r)}{\partial r}\right|_{r=a} \sin\beta z \; dz \tag{11.20}$$

Din proprietăți cunoscute [11.5] ale funcției Bessel (Fig.11.5)

$$\left.\frac{\partial I_0(\beta r)}{\partial r}\right|_{r=a} = \beta I_1(\beta a) \tag{11.21}$$

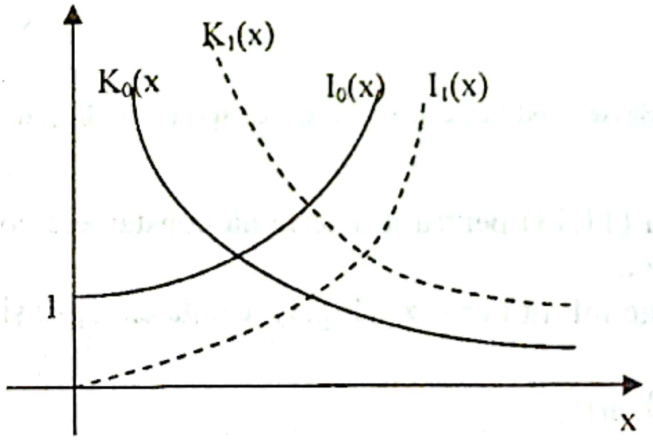


Fig.11.5. Proprietăți ale funcțiilor Bessel exprimate sub formă grafică

$$\left.\frac{\partial K_0(\beta r)}{\partial r}\right|_{r=a} = -\beta K_1(\beta a) \tag{11.22}$$

Din ultimele trei relații rezultă

$$A_\beta = -C_\beta \frac{K_1(\beta a)}{I_1(\beta a)} \tag{11.23}$$

Scanned with OKEN Scanner

Folosind formula rotorului superficial ilustrată în Fig.11.6 avem succesiv

$\mathrm{rot}_S \mathbf{H}=\mathbf{J}_S$

$\mathbf{J}_S(a,z)=\mathbf{n}\times[\mathbf{H}^e(a,z)-\mathbf{H}^i(a,z)]=[H_z{}^e(a,z)-H_z{}^i(a,z)](\mathbf{e}_r\times\mathbf{e}_z)=$

$=[H_z{}^i(a,z)-H_z{}^e(a,z)]\,\mathbf{e}_\theta$ (11.24)

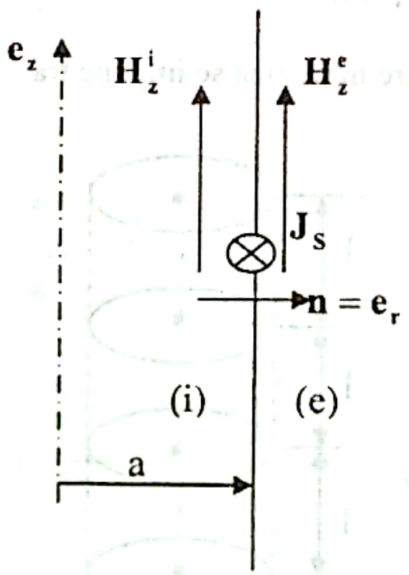


Fig.11.6 Rotorul superficial al lui **H** ne dă densitatea pânzei de curent

Cu (11.24) şi (11.27), (11.29):

$$J_S(a,z)=\int_0^\infty C_\beta \beta\cos\beta z\left[\frac{I_0(\beta a)}{I_1(\beta a)}K_1(\beta a)+K_0(\beta a)\right]d\beta \qquad (11.25)$$

Ţinând seama că între constante există relaţia (11.23) şi că câmpul magnetic este gradientul cu semn schimbat al potenţialului magnetic scalar rezultă imediat

$$H_r^{(i)}=\int_0^\infty C_\beta \beta\frac{K_1(\beta a)}{I_1(\beta a)}I_1(\beta r)\sin\beta z\,d\beta \qquad (11.26)$$

Scanned with OKEN Scanner

$$H_z^{(i)} = \int_0^{\infty} C_\beta \beta \frac{K_1(\beta a)}{I_1(\beta a)} I_0(\beta r)\cos\beta z\, d\beta \qquad (11.27)$$

$$H_r^{(e)} = +\int_0^{\infty} C_\beta \beta K_1(\beta r)\sin\beta z\, d\beta \qquad (11.28)$$

$$H_z^{(e)} = -\int_0^{\infty} C_\beta \beta K_0(\beta r)\cos\beta z\, d\beta \qquad (11.29)$$

Pentru a trece la o abordare numerică se impune transformarea integralei Fourier în serie Fourier.

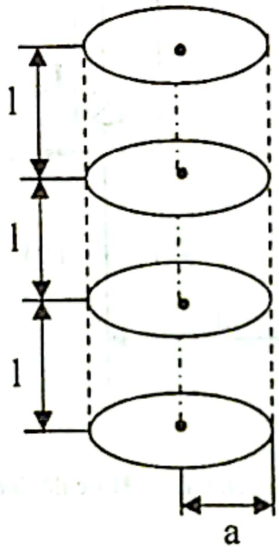


Fig.11.7 Suprapunerea bobinelor face ca problema să devină periodică după axa z.

Integrala Fourier se transformă în serie Fourier folosind un artificiu uzual [11.1] şi anume considerând problema periodică în lungul axei zz' conform Fig.11.7 şi discretizând parametrul β după formula

$$\beta = \frac{2\pi}{l} n \qquad (11.30)$$

Putem găsi acum expresiile care ne interesează din (11.27) respectiv din (11.25)

Scanned with OKEN Scanner

$$H_z^{(i)}(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{2\pi}{l}n\frac{K_1\left(\frac{2\pi}{l}na\right)}{I_1\left(\frac{2\pi}{l}na\right)}I_0\left(\frac{2\pi}{l}nr\right)\cos\left(\frac{2\pi}{l}nz\right) \qquad (11.31)$$

$$J_S(a,z)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{2\pi}{l}n\cos\left(\frac{2\pi}{l}nz\right)\left[\frac{I_0\left(\frac{2\pi}{l}na\right)}{I_1\left(\frac{2\pi}{l}na\right)}K_1\left(\frac{2\pi}{l}na\right)+K_0\left(\frac{2\pi}{l}na\right)\right] \qquad (11.32)$$

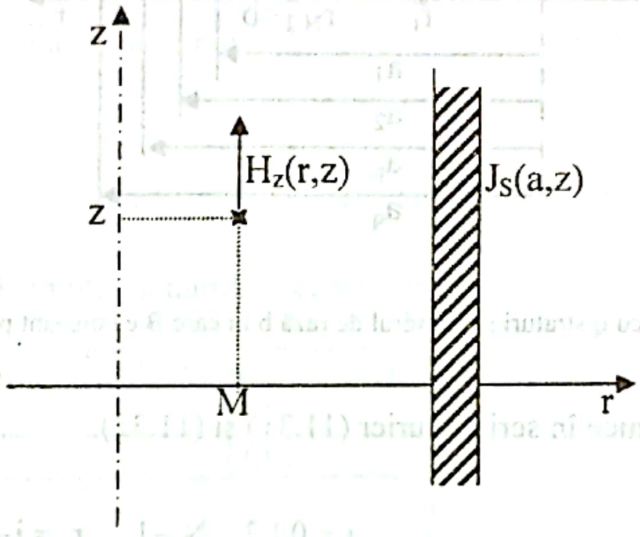


Fig.11.8 Densitatea pânzei de curent J_S care crează componenta câmpului magnetic H_z

Se consideră q straturi de înfăşurări având respectiv razele

$$a_1=a;\quad a_2=a+\delta.;\ldots a_p=a+(p-1)\delta\ldots a_q=a+(q-1)\delta. \qquad (11.33)$$

conform Fig.11.9.

După calculul lui J stratul se poate face din bobine distincte şi scurte suprapuse.

Scanned with OKEN Scanner

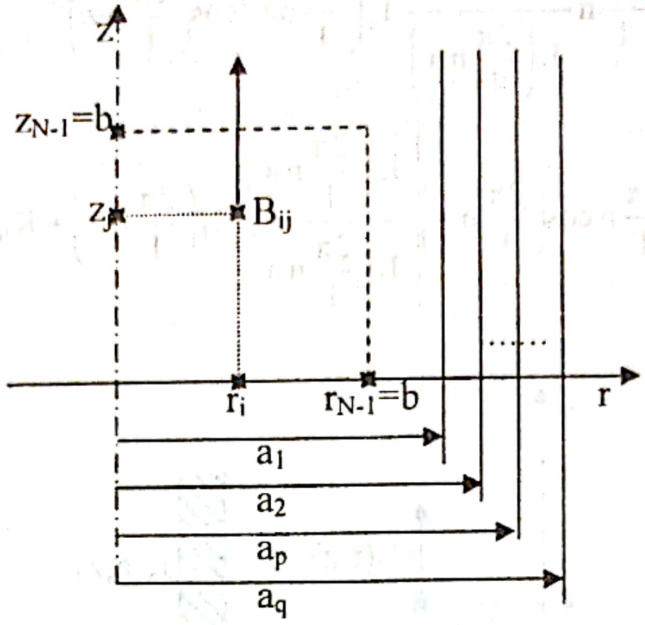


Fig.11.9 Bobina cu q straturi şi cilindrul de rază b în care **B** e constant pe direcţia z

Se consideră m armonice în seria Fourier (11.31) şi (11.32).

$$B_{ij}=\sum_{p=1}^{q}B^{(p)}(r_i,z_j)=\sum_{p=1}^{q}\mu_0 H_z^{(p)(i)}(r_i,z_j)\qquad \begin{matrix} i=0,1,2,\ldots N-1 & r_i=i\dfrac{b}{N-1} \\ j=0,1,2,\ldots N-1 & z_j=j\dfrac{b}{N-1}\end{matrix} \tag{11.34}$$

Stratul de ordinul p cu raza a_p,produce în punctul (r_i,z_j) câmpul de valoare:

$$B^{(p)}(r_i,z_j)=\sum_{n=1}^{m}C_{np}\frac{\mu_0 2\pi}{l}n\,I_0\left(\frac{2\pi}{l}n\,r_i\right)\cos\left(\frac{2\pi}{l}n\,z_j\right)\frac{K_1\left(\dfrac{2\pi}{l}n\,a_p\right)}{I_1\left(\dfrac{2\pi}{l}n\,a_p\right)} \tag{11.35}$$

Toate straturile (q straturi) produc în punctul (r_i,z_j) câmpul de valoare:

Scanned with OKEN Scanner

$$B(r_i, z_j) = \sum_{p=1}^{q} \sum_{n=1}^{m} C_{np} \frac{\mu_0 2\pi}{l} n I_0\left(\frac{2\pi}{l} n r_i\right) \cos\left(\frac{2\pi}{l} n z_j\right) \frac{K_1\left(\frac{2\pi}{l} n a_p\right)}{I_1\left(\frac{2\pi}{l} n a_p\right)} \qquad (11.36)$$

Impunând condiția de sinteză (câmp constant în fiecare din cele N^2 puncte) rezultă un sistem de N^2 ecuații

Numărul necunoscutelor este mq:

$$\begin{cases} C_{11}, C_{21}, \ldots C_{m1} \\ C_{12}, C_{22}, \ldots C_{m2} \\ . \\ . \\ . \\ C_{1q}, C_{2q}, \ldots C_{mq} \end{cases}$$

Justificăm faptul amintit că numărul ecuațiilor este N^2

Numărul ecuației	Pentru punctul (i,j)
1	(0,0)
2	(1,0)
. . .	. . .
N	(N-1,0)
N+1	(0,1)
N+2	(1,1)
. . .	. . .
N^2	(N-1,N-1)

Se pune problema de a găsi forma coeficienților sistemului pe care îi notăm cu $A_{\mu\nu}$

Scanned with OKEN Scanner

$$A_{\mu\nu} \in [A]\ (N^2 - \text{linii}, mq - \text{coloane}) \quad [A][x] = [u];\ [u] = \frac{1}{\mu_0}\left.\begin{bmatrix} B_0 \\ B_0 \\ \dots \\ B_0 \end{bmatrix}\right\} N^2 \text{ec.} = N^2 \text{linii}$$

Se deduce succesiv

$$j = \left[\frac{\mu - 1}{N}\right] + 1 \qquad (11.37)$$
$$i = \mu - (j-1)N$$

$$r_i = i\frac{b}{N-1} \qquad (11.38)$$
$$z_j = j\frac{b}{N-1}$$

$$p = \left[\frac{\nu - 1}{m}\right] + 1 \qquad (11.39)$$

$$n = \nu - (p-1)m \qquad (11.40)$$

$$a_p = a + (p-1)\delta \qquad (11.41)$$

Algoritmul de calcul este evident. Coeficientul pe care vrem să-l calculăm este dat prin μ şi ν. Se calculează i şi j cu (11.37) apoi r_i şi z_j cu (11.38) şi în sfârşit p, n, şi a_p cu (11.39), (11.40) şi respectiv (11.41).
Astfel se pot calcula toţi coeficienţii sistemului

$$A_{\mu\nu} = \frac{2\pi}{l} n I_0\left(\frac{2\pi}{l} n r_i\right)\cos\left(\frac{2\pi}{l} n z_j\right)\frac{K_1\left(\frac{2\pi}{l} n a_p\right)}{I_1\left(\frac{2\pi}{l} n a_p\right)} \qquad (11.42)$$

Dacă se ia numărul de straturi q numărul de armonice m şi numărul de diviziuni N astfel încât

Scanned with OKEN Scanner

$$N^2 = mq \tag{11.43}$$

atunci sistemul are acelaşi număr de linii şi coloane şi

$$[x]=[A]^{-1}[u] \tag{11.44}$$

OBSERVAŢIE

Condiţia (11.43) nu este obligatorie. Se poate ca N^2 să fie mai mare decât mq. Sistemul este de aşteptat să rezulte degenerat, iar aplicaţia numerică o dovedeşte. În această situaţie se aplică metoda regularizării sistemelor degenerate.

Se poate calcula vectorul eroare

$$[\varepsilon]=[A][x]-[u] \tag{11.45}$$

Se observă că pe baza valorii maxime şi minime a erorii se calculează omogenitatea

$$B_{max}=\varepsilon_{max}+B_0 \qquad B_{min}=\varepsilon_{min}+B_0 \qquad h_\varepsilon=\frac{B_{max}-B_{min}}{B_{max}+B_{min}}=\frac{\varepsilon_{max}-\varepsilon_{min}}{\varepsilon_{max}+\varepsilon_{min}+2B_0} \tag{11.46}$$

Odată sistemul rezolvat se poate găsi densitatea superficială a pânzei de curent pe fiecare strat

$$J_S(a_p,z)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{np}\frac{2\pi}{l}n\cos\left(\frac{2\pi}{l}nz\right)\left[\frac{I_0\left(\frac{2\pi}{l}na_p\right)}{I_1\left(\frac{2\pi}{l}na_p\right)}K_1\left(\frac{2\pi}{l}na_p\right)+K_0\left(\frac{2\pi}{l}na_p\right)\right] \tag{11.47}$$

unde $C_{np}=x_{m(p-1)+n}$

Între densitatea pânzei de curent (liniară) şi densitatea de curent uzuală (superficială) există legătura:

$$J(a_p,z)\left[\frac{A}{m^2}\right]=J_S(a_p,z)\left[\frac{A}{m}\right]\frac{1}{\delta} \tag{11.48}$$

Expresia (11.48) este adevărată numai dacă

$$\delta\left[H_r(a_p,z+\Delta h)-H_r(a_p,z)\right]\approx 0 \tag{11.49}$$

Se va demonstra acest lucru pe baza schemei din Fig.11.10.

Să considerăm o diviziune uniformă a lungimii bobinei

$z_k=k\frac{l}{2w}$, unde k=0,1,2,...w; şi $\frac{l}{2w}=h$

Scanned with OKEN Scanner

Notăm cu I_k curentul în amperi care trece prin suprafața dreptunghiulară de dimensiuni δ și h. Cu notația

$J_{Sk} = J_S(a_p, z_k)$ avem

$$I_k = h J_{Sk} \tag{11.50}$$

Din formula rotorului superficial rezultă

$$H_z^{(i)} - H_z^{(e)} = J_{Sk} \tag{11.51}$$

iar din legea circuitului magnetic scrisă pentru conturul dreptunghiular de dimensiuni δ și h avem

$$\left(H_z^{(i)} - H_z^{(e)}\right)h + \left[H_r(z+h) - H_r(z)\right]\delta = I_k \tag{11.52}$$

Din combinarea relațiilor (11.50), (11.51) și (11.52) rezultă

$[H_r(z+h) - H_r(z)]\delta = 0$

Relația de mai sus este cu atât mai bine verificată cu cât δ este mai mic.

Pentru programele specializate de calcul de câmp se impune ca să se lucreze cu densitatea superficială de curent $J_k\left[\frac{A}{m^2}\right] = \frac{I_k}{\delta h} = \frac{J_{Sk}}{\delta}$

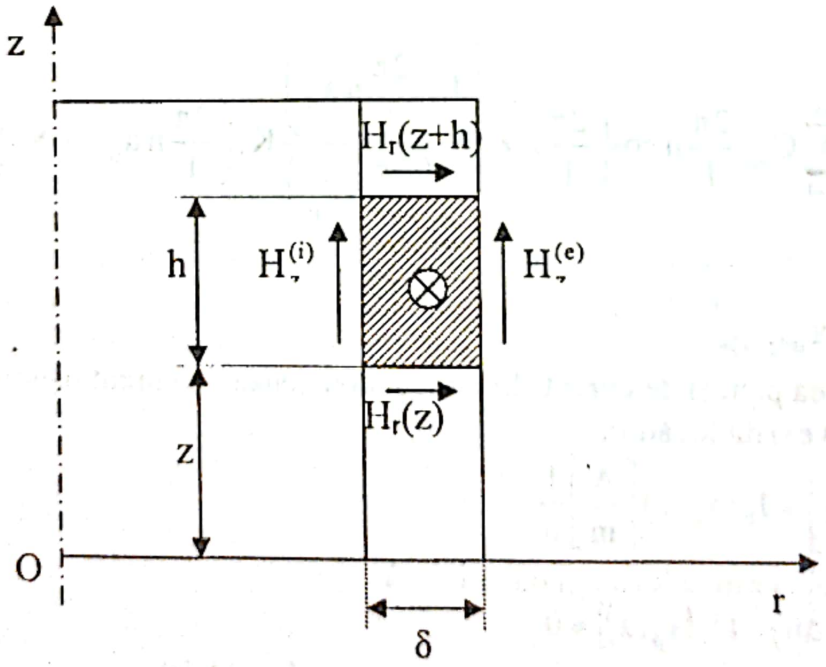


Fig.11.10 Legătura condiționată dintre densitatea de curent și densitatea pânzei de curent

Scanned with OKEN Scanner

11.1.4.REZULTATE NUMERICE ŞI GRAFICE

A fost ales modelul din [11.2] cu aceleaşi dimensiuni pentru a compara mai uşor rezultatele. Reamintim valorile numerice considerate a=0,16m; l=0,439m; b=0,096m; B_0=0,6 T.

S-a lucrat în mai multe variante, m=4, q=9 apoi m=9, q=4 şi m=6, q=6. În toate aceste cazuri s-a luat N=6. S-a luat pe rând δ=0,005m şi δ=0,03m [11.8].

Pentru că rezultatele nu diferă în mod esenţial, se prezintă un singur caz.

EXEMPLU

S-a ales δ=0,005m, N=6, m=4, q=9, w=10.

Sistemul care a rezultat are 36 de ecuaţii şi 36 de necunoscute şi este foarte rău condiţionat, numărul de condiţionare fiind 10^{37}.

Rezolvarea s-a făcut cu metoda regularizării sistemelor degenerate, parametrul de regularizare fiind $\alpha=1{,}4671\ 10^{-14}$.

Valorile curenţilor pe fiecare din cele 9 straturi sunt invers proporţionale cu raza stratului respectiv.

Astfel curentul total, reprezentat prin w=10 puncte, are alura asemănătoare cu curentul din fiecare strat (Fig.11.11).

Comparaţia cu rezultatele din [11.2] se face prin cele 4 valori de curent reprezentate în grafic prin 4 cercuri mici. Se constată o evidentă asemănare cu rezultatele obţinute de cercetătorii japonezi..

Valoarea mare a inducţiei magnetice şi mediul (aer) face ca valorile

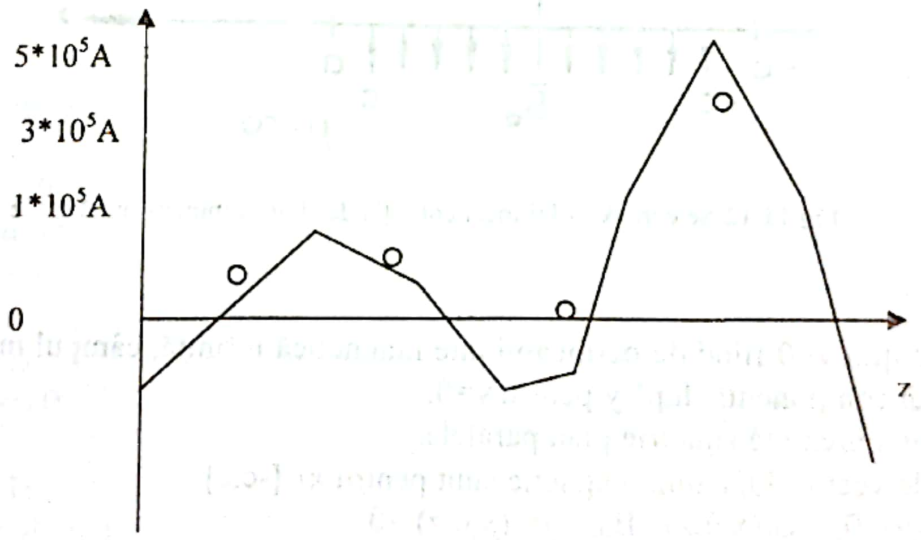


Fig.11.11 Curentul din înfăşurări în funcţie de înălţime, m=4, q=9, w=10

curenţilor să fie foarte mari deci practic realizarea se poate face numai cu bobine supraconductoare. Omogenitatea obţinută este de 4%.

Scanned with OKEN Scanner

11.2 EXEMPLIFICAREA METODEI DIRECTE DE SINTEZĂ ANALITICĂ PRIN REZOLVAREA PROBLEMEI INVERSE A POTENȚIALULUI MAGNETIC VECTOR

Se consideră distribuția de curent $J_z(x)$ liniară $x\in[-a, a]$ din planul $y=b$ cu proprietatea $J(x)=-J(x)$. Semispațiul $y<0$ este ocupat de un mediu de permeabilitate magnetică foarte mare ($\mu=\infty$). Se pune problema de sinteză de a se determina distribuția $J(x)$ care să asigure în planul $y=0$ pe porțiunea $x\in[-c, c]$ un câmp magnetic B_0 constant, iar în rest, pentru $x\in(-\infty, -c)\cup(c, \infty)$ câmpul magnetic să fie nul.

În scopul rezolvării se cere să se determine potențialul magnetic vector în planul $y=0$, astfel încât condiția de sinteză cerută pentru **B** să se transfere asupra lui **A**.

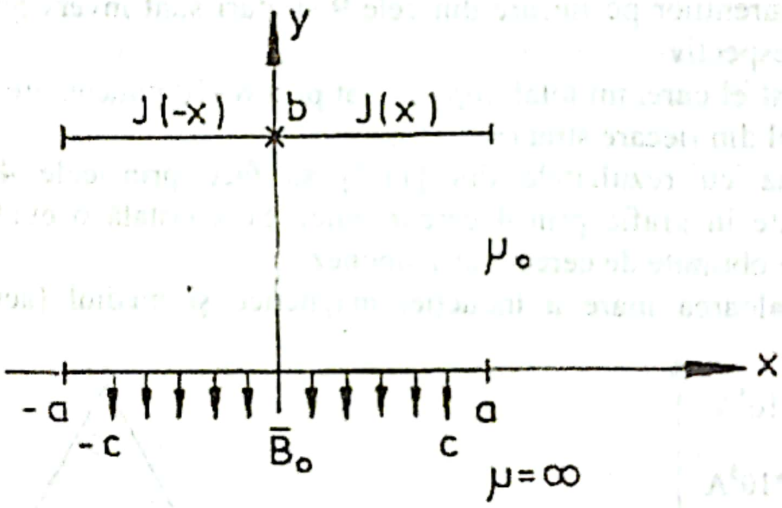


Fig.11.12 Se cere **A** astfel încât condiția de sinteză impusă lui **B** să fie

Semispațiul $y<0$ fiind de permeabilitate magnetică infinită, câmpul magnetic va avea numai componentă după y pentru $y=0$.

Problema prezintă simetrie plan paralelă.

Componentele vectorului câmp magnetic sunt pentru $x\in[-c,c]$:

$$B_x(x,0,z)=0, \quad B_y(x,0,z)=B_0, \quad B_z(x,0,z)=0 \tag{11.53}$$

Componentele potențialului magnetic vector pentru $x\in[-c, c]$ sunt date de ecuațiile (7.50) – (7.52) :

Scanned with OKEN Scanner

$$A_x(x,0,z) = \int_{z_0}^{z} B_0 dz + \frac{\partial U}{\partial x} \tag{11.54}$$

$$A_y(x,0,z) = \frac{\partial U}{\partial y} \tag{11.55}$$

$$A_z(x,0,z) = \frac{\partial U}{\partial z} \tag{11.56}$$

Problema fiind plan paralelă, componentele lui **A** nu depind de coordonata z. În plus, relațiile fiind scrise pentru y=0, membrul drept nu depinde nici de y.
Ținând seama de acestea, avem :

$$A_x(x,0,z) = B_0(z - z_0) + \frac{\partial U}{\partial x} = m(x) \tag{11.57}$$

$$A_y(x,0,z) = \frac{\partial U}{\partial y} = n(x) \tag{11.58}$$

$$A_z(x,0,y) = \frac{\partial U}{\partial z} = p(x) \tag{11.59}$$

Din (11.59) rezultă :

$$U = z \cdot p(x) + C_1 \cdot (x) \tag{11.60}$$

Din (11.58) folosind expresia lui U din (11.60) rezultă :

$$n(x) = 0 \tag{11.61}$$

Înlocuind în (11.57) expresia lui U din (11.60) rezultă :

$$B_0(z-z_0) + p'(x)z + C'_1(x) = m(x) \tag{11.62}$$

Rezultă :

$$p'(x) = -B_0 \tag{11.63}$$

de unde :

$$p(x) = -B_0 x + C \tag{11.64}$$

Se alege condiția de etalonare :

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \tag{11.65}$$

de unde :

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{\partial m(x)}{\partial x}+\frac{\partial n(x)}{\partial y}+\frac{\partial p(x)}{\partial z}=0 \qquad (11.66)$$

Rezultă că m(x) este o constantă m, deci (11.62) devine :

$$B_0(z-z_0)-B_0z+C'_1(x)=m \qquad (11.67)$$

Aşadar

$$C'_1(x)=m+z_0\,B_0 \qquad (11.68)$$

de unde dacă se ia

$$C_1(x)=z_0\,B_0\,x+C_2 \qquad (11.69)$$

rezultă

$$m=0 \qquad (11.70)$$

Rezultă m=0. (S-a ţinut seama că z_0 este arbitrar)

În concluzie

$$A_x(x,0,z)=A_y(x,0,z)=0 \qquad (11.71)$$

şi

$$A_z(x,0,z)=-B_0x+C \qquad (11.72)$$

pentru $x\in[-c, c]$

Pentru $x\in(-\infty, -c)\cup(c, +\infty)$ în ecuaţiile (11.71) – (11.72) se face $B_0=0$ şi rezultă

$$A_x(x,0,z)=A_y(x,0,z)=0 \qquad (11.73)$$

şi

$$A_z(x,0,z)=C_3 \qquad (11.74)$$

Punând condiţia de continuitate a lui $A_z(x,0,z)$ rezultă

$$C_3=C-B_0c \text{ pentru } x\in(c,+\infty) \qquad (11.75)$$

şi respectiv

$$C_3=C+B_0c \text{ pentru } x\in(-\infty,-c) \qquad (11.76)$$

Constanta C se poate lua nulă şi soluţia finală devine

$$\mathbf{A}=-B_0\,x\,\mathbf{k} \text{ pentru } x\in[-c, c] \qquad (11.77)$$

$$\mathbf{A}=-B_0\,c\,\mathbf{k} \text{ pentru } x\in(c, +\infty) \qquad (11.78)$$

$$\mathbf{A}=B_0\,c\,\mathbf{k} \text{ pentru } x\in(-\infty, -c) \qquad (11.79)$$

Scanned with OKEN Scanner

Pornind de la aceste rezultate se poate determina numeric distribuția de curent care asigură un câmp magnetic constant în planul y=0 pe porțiunea de interes cuprinsă între x=c și x=-c. În [11.9] problema este rezolvată numeric cu metoda Monte Carlo și rezultatele sunt comparate cu soluția analitică obținută cu metoda Țugulea.

BIBLIOGRAFIE la capitolul 11

11.1.Țugulea, A., *Câteva exemple de sinteze de câmp magnetic în regim staționar,* St. cerc. energ. electr., Tom 14, Nr. 4, pag. 735-744, Bucureşti, 1964.

11.2.Matsuda, T.,Yamada, T., Morita, M., Yamamoto, S., Iwamoto, M., *High homogeneous field super-conducting magnet composed of 8 solenoid coils*, V.F.C., 1997.

11.3.Frese, G., Pausch, G., Ries, G., *Aspect of shimming a super-conductive whole-body MRI-Magnet*, V.F.C., 1997.

11.4.Braun Martin, *Differential equations and their applications*, Spr. Verl. New-York, !993.

11.5.Watson, G.N., *Theory of Bessel function*, Oxford, 1994.

11.6.Laychlan, Mc. *Bessel functions for engineers*, Oxford London, 1961.

11.7.Crowder, H., Cuskey, Mc., *Topics in higher analysis*, Oxford, 1993.

11.8.Micu, D., Micu, Adriana, *Synthesis of homogenous field for magnetic resonance imaging,* Proceedings of the International Workshop " CAD in Electromagnetism and Electrical Circuits", CADEMEC 97, pp.24-27, Cluj-Napoca, 1997.

11.9.Micu, D., Micu, Adriana, *Analytical and Monte Carlo method for inverse problem,* International Symposium on Electromagnetic Fields in Electrical Engineering, ISEF 97, Gdansk, Poland, sept.,1997.

Scanned with OKEN Scanner

Tiparul executat prin comanda nr. 677, 2005, la

CARTPRINT Baia Mare, cod 430061
cartier Săsar, str. Victoriei nr. 146
tel./fax: 0262/218923
ROMÂNIA

Scanned with OKEN Scanner

COLECȚIA UNIVERSITARIA
SERIA TEHNICA

Tematica acestei cărți este originală, fiind prima carte de la noi din țară care abordează subiectul sintezei de câmp. Deşi nivelul teoretic este ridicat, cartea este scrisă cu multă atenție la detalii, astfel încât lectura sau studiul să fie accesibile unui public cât mai numeros.

Avem convingerea că apariția acestei cărți va constitui un pas înainte pentru cercetarea ştiințifică românească prin faptul că pune la îndemâna celor interesați rezultate de vârf din literatura matematică şi electrotehnică a ultimilor ani. Prin aplicațiile prezente în lucrare sperăm că putem convinge pe cei care lucrează în domeniul proiectării că sinteza de câmp este un instrument de concepție clar, modern şi eficient.

ISBN 973-35-1617-1
9 789733 516170
EDITURA DACIA
www.edituradacia.ro